TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR 2YD18, 14 januari 2009, 09.00-12.00 uur.

---

1. a)

$$\begin{aligned} p_{3,1^+} &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{24}, \\ p_{3,2} &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \\ p_{3,3} &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{11}{24}, \\ p_{3,4} &= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

b) Gevraagd $m_0(A)$ met $A = \{2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned} m_0(A) &= 1 + \tfrac{1}{2} m_0(A) + \tfrac{1}{2} m_{1^+}(A), \\ m_{1^+}(A) &= 1 + \tfrac{1}{6} m_0(A) + \tfrac{1}{2} m_{1^+}(A). \end{aligned}$$

Er volgt $m_0(A) = 6$ en $m_{1^+}(A) = 4$. Het gevraagde aantal minuten is dus $m_0(A) = 6$.

c) Kostenvector $c = (0, 40, 50, 90, 90, 90)$.
Verwachte kosten per uur: $60 \cdot \sum \pi_j c_j = 60 \cdot 70.21 = 4212.6$ euro.

d) doorzet snelle machine: $0.845 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 = 16.9$ jobs per uur.
doorzet langzame machine: $0.699 \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 = 10.5$ jobs per uur.

e) Toestandsruimte: $S = \{0, 1^+, 2, 3, 4\}$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

2. a) Toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. De intensiteitenmatrix is (tijdseenheid: week)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Normeringsvergelijking: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$. Balansvergelijkingen

$$\begin{aligned} 10p_0 &= 3p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \\ 13p_1 &= 10p_0 + 4p_2, \\ 15p_2 &= 10p_1 + 6p_3, \\ 17p_3 &= 10p_2 + 8p_4, \\ 14p_4 &= 10p_3 + 10p_5, \\ 11p_5 &= 5p_4. \end{aligned}$$

c) Gevraagd $m_5(A)$ met $A = \{0,1,2,3\}$.

$$\begin{aligned} m_5(A) &= \tfrac{1}{11} + \tfrac{10}{11} m_4(A), \\ m_4(A) &= \tfrac{1}{14} + \tfrac{5}{14} m_5(A). \end{aligned}$$

Er volgt $m_4(A) = \frac{2}{13}$ week en $m_5(A) = \frac{3}{13}$ week $= 1.15$ werkdagen.

d) $10 \cdot (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) + 5 \cdot p_4 = 7.815$ onderdelen per week.

e) $L_{rep} = \sum_{i=0}^{5} (5-i) p_i = 2.396$ en $\lambda_{rep} = 7.815$.
We vinden dus $W_{rep} = 2.396/7.815 = 0.3066$ week $= 1.53$ werkdagen.

3. a) Toestandsruimte $S = \{0,1,2,3,4,5\}$. De intensiteitenmatrix is (tijdseenheid: uur)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Normeringsvergelijking: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$. Snedevergelijkingen

$$\begin{aligned} 8p_0 &= 6p_1, \\ 8p_1 &= 6p_2, \\ 8p_2 &= 10p_3, \\ 8p_3 &= 10p_4, \\ 8p_4 &= 10p_5. \end{aligned}$$

Limietverdeling

$$p_0 = \tfrac{1125}{8529},\ p_1 = \tfrac{1500}{8529},\ p_2 = \tfrac{2000}{8529},\ p_3 = \tfrac{1600}{8529},\ p_4 = \tfrac{1280}{8529},\ p_5 = \tfrac{1024}{8529}.$$

b) Bediend: $\frac{6(1-p_0)}{8} = \frac{5.208}{8} = 65.1\%$.
Verlaat bij aankomst: $\frac{8p_5}{8} = \frac{0.96}{8} = 12.0\%$.
Verlaat later: $\frac{4(p_3+p_4+p_5)}{8} = \frac{1.83}{8} = 22.9\%$.

4. a) (Tijdseenheid: uur) $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 6$ en $\mu_1 = 4, \mu_2 = 60/9, \mu_3 = 15, \mu_4 = 60/7$
en dus $\rho_1 = 3/4, \rho_2 = 9/10, \rho_3 = 4/5, \rho_4 = 7/10$.

$$p(k_1,k_2,k_3,k_4) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1}(1-\rho_2)\rho_2^{k_2}(1-\rho_3)\rho_3^{k_3}(1-\rho_4)\rho_4^{k_4} = \frac{3}{2000}\left(\frac{3}{4}\right)^{k_1}\left(\frac{9}{10}\right)^{k_2}\left(\frac{4}{5}\right)^{k_3}\left(\frac{7}{10}\right)^{k_4}$$

b) $L_{tot} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 55/3$, $\lambda_{tot} = 6$ en dus $W_{tot} = \frac{L_{tot}}{\lambda_{tot}} = \frac{55}{18} = 3.055$ uur.

c) Laat W_i de verwachte verblijftijd van een job in station i, per keer dat hij station i bezoekt.
Dan geldt $W_1 = L_1/a_1 = 1$, $W_2 = L_2/a_2 = 3/2$, $W_3 = L_3/a_3 = 1/3$, $W_4 = L_4/a_4 = 7/18$.

$$\begin{aligned} W_{tot}^{(1)} &= W_1 + W_2 + 2W_3 + W_4 = \tfrac{64}{18} = 3.555 \text{ uur.} \\ W_{tot}^{(2)} &= W_2 + 2W_3 + W_4 = \tfrac{46}{18} = 2.555 \text{ uur.} \end{aligned}$$