TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21), 26 januari 2010, 14.00-17.00 uur.

---

1. a) - A_n = aantal pakketten dat in tijdslot n binnenkomt: $P(A_n = a) = \binom{5}{a}(\frac{1}{2})^5$, waarbij geldt $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
   $P(X_{n+1} = 0|X_n = 5) = P(X_{n+1} = 1|X_n = 5) = 0$, omdat in tijdslot n precies 3 pakketten verstuurd worden en dus begin tijdslot $(n + 1)$ nog minstens 2 pakketten in de buffer zijn.
   $P(X_{n+1} = 2|X_n = 5) = P(A_n = 0) = \binom{5}{0}(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$,
   $P(X_{n+1} = 3|X_n = 5) = P(A_n = 1) = \binom{5}{1}(\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}$,
   $P(X_{n+1} = 4|X_n = 5) = P(A_n = 2) = \binom{5}{2}(\frac{1}{2})^5 = \frac{10}{32}$,
   $P(X_{n+1} = 5|X_n = 5) = P(A_n \geq 3) = \binom{5}{3}(\frac{1}{2})^5 + \binom{5}{4}(\frac{1}{2})^5 + \binom{5}{5}(\frac{1}{2})^5 = \frac{16}{32}$.
   - Als $X_n \leq 3$, dan worden alle (eventueel) aanwezige pakketten in tijdslot n verstuurd. de kansen op $X_{n+1} = 0, 1, \ldots, 5$ pakketten in de buffer aan het begin van tijdslot $(n + 1)$ zijn dus in al die gevallen gelijk aan de kansen op $0, 1, \ldots, 5$ nieuwe pakketten in tijdslot n.

   b) Gemiddeld aantal per tijdslot verstuurde pakketten op lange termijn:
   $$0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot (\pi_3 + \pi_4 + \pi_5) = 2.4674.$$

   c) Gemiddeld aantal nieuwe pakketten per tijdslot is 2.5. Gemiddeld aantal per tijdslot verzonden pakketten is 2.4674. Gemiddeld aantal per tijdslot verloren pakketten is dus $2.5 - 2.4674 = 0.0326$ pakketten. Dit is 1.3% van het totaal aantal arriverende pakketten.

   d) Gebruik de formule van Little. Het gemiddeld aantal pakketten in de buffer is $\sum_{i=0}^{5} i\pi_i = 2.9144$. Het gemiddeld aantal per tijdslot verzonden pakketten is 2.4674. Het aantal tijdsloten dat een pakket in de buffer zit is dus $2.9144/2.4674 \approx 1.18$.

   e) De toestandsruimte blijft $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. De overgangsmatrix P wordt:
   $$P = \begin{pmatrix} 26/32 & 5/32 & 1/32 & 0 & 0 & 0 \\ 16/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 & 0 & 0 \\ 6/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 & 0 \\ 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 \\ 0 & 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 6/32 \\ 0 & 0 & 1/32 & 5/32 & 10/32 & 16/32 \end{pmatrix}.$$
   $P(Y_{n+1} = 0|Y_n = 0) = P(A_n \leq 3) = \frac{26}{32}$.
   $P(Y_{n+1} = 1|Y_n = 0) = P(A_n = 4) = \frac{5}{32}$.
   $P(Y_{n+1} = 2|Y_n = 0) = P(A_n = 5) = \frac{1}{32}$.
   $P(Y_{n+1} \geq 3|Y_n = 0) = 0$ omdat van de binnenkomende pakketten in tijdslot n er drie verzonden kunnen worden en er maximaal vijf kunnen binnenkomen. De andere rijen gaan analoog.

2. a) Toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De intensiteitenmatrix is (tijdseenheid: uur)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Normeringsvergelijking: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Snedevergelijkingen

$$\begin{aligned} 20p_0 &= 20p_1, \\ 15p_1 &= 20p_2, \\ 10p_2 &= 20p_3, \\ 5p_3 &= 20p_4. \end{aligned}$$

De limietverdeling volgt uit combinatie van normeringsvergelijking + snedevergelijkingen.

b) Per uur arriveren 20 auto's en er worden per uur $20 \cdot (1 - p_0)$ auto's bediend. Er vertrekken dus per uur $20 \cdot p_0$ zonder bediend te worden. De gevraagde fractie is dus gelijk aan $p_0 = 32/103 \approx 31\%$.

c) Gebruik de formule van Little. Het gemiddeld aantal auto's bij het benzinestation is $\sum_{i=0}^{4} ip_i = 128/103$. Het gemiddeld aantal per uur bediende auto's is $1420/103$. De gemiddelde verblijftijd van een auto is dus $128/1420 \approx 0.09$ uur ≈ 5.41 minuten.

d) Als bij c, maar nu moet je alle auto's meerekenen, en niet alleen de auto's die werkelijk bediend worden. Het gemiddeld aantal arriverende auto's per uur is 20. De gemiddelde verblijftijd van een auto is dus $128/2060 \approx 0.062$ uur ≈ 3.73 minuten.

e) Gevraagd $m_2(A)$ met $A = \{0, 1\}$. (tijdseenheid: minuut)

$$\begin{aligned} m_2(A) &= 2 + \tfrac{1}{3}m_3(A), \\ m_3(A) &= 2.4 + \tfrac{1}{5}m_4(A) + \tfrac{4}{5}m_2(A), \\ m_4(A) &= 3 + m_3(A). \end{aligned}$$

Er volgt $m_2(A) = 4.875$ minuten en $m_3(A) = 8.625$ minuten en $m_4(A) = 11.625$ minuten.

3. a) $M/G/1$ wachtrij, tijdseenheid minuut.

$$\text{Bedieningstijd} = \begin{cases} \mathrm{U}(1,3), & \text{met kans } \frac{3}{4}, \\ \mathrm{U}(3,x), & \text{met kans } \frac{1}{4}. \end{cases}$$

We hebben

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3} \text{ klant per minuut }, \\ \tau &= \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3+x}{2} = \frac{15+x}{8} \text{ minuten }. \end{aligned}$$

Om een stabiele situatie te hebben moet gelden dat $\lambda\tau < 1$, en dus $x < 9$.

b) In dit geval geldt

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{3} \text{ klant per minuut }, \\ \tau &= \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2} \text{ minuten }, \\ \rho &= \lambda\tau = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

$$s^2 \quad = \quad \frac{3}{4}\cdot\frac{13}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{49}{3} = 22/3 \text{ minuten}^2.$$

Dit geeft

$$W = \tau + W_q = \tau + \frac{\lambda s^2}{2(1-\rho)} = \frac{59}{6} \approx 9.83 \text{ minuten }.$$

4. a) Het aantal werkende onderdelen in de machine is een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{4,3,2,1,0\}$ en intensiteitenmatrix (tijdseenheid: maand)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De levensduur $E(T_1)$ van de machine volgt uit de berekening van de first passage time van toestand 4 naar toestand 0 van deze continue-tijd Markov keten.

$$\begin{aligned} m_4(0) &= 1 + m_3(0), \\ m_3(0) &= 4/3 + m_2(0), \\ m_2(0) &= 2 + m_1(0), \\ m_1(0) &= 4. \end{aligned}$$

We hebben dus $E(T_1) = m_4(0) = \frac{25}{3}$ maanden $= \frac{25}{36}$ jaar . De lange-termijn gemiddelde vervangingskosten volgen nu uit de formule $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 1250$ en $E(T_1) = \frac{25}{36}$.

b) $P(T_1 > 6) = 1 - P(T_1 \le 6) = 1 - (1 - e^{-1.5})^4 \approx 0.636$.

c) Analoog aan onderdeel a geldt nu $E(T_1) = m_4(1) = \frac{13}{3}$ maanden $= \frac{13}{36}$ jaar . De lange-termijn gemiddelde vervangingskosten per jaar worden nu $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 780$ en $E(T_1) = \frac{13}{36}$. Het antwoord is dus 2160 euro.