TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Antwoorden tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD27), 20 januari 2011.

---

1. a) Bereken $m_1(A)$ met $A = \{5\}$. Het stelsel vergelijkingen dat je moet oplossen is

$$\begin{aligned} m_1(A) &= 1 + \tfrac{1}{2}m_1(A) + \tfrac{1}{4}m_2(A), \\ m_2(A) &= 1 + \tfrac{1}{2}m_2(A) + \tfrac{1}{4}m_3(A), \\ m_3(A) &= 1 + \tfrac{1}{2}m_3(A) + \tfrac{1}{4}m_4(A), \\ m_4(A) &= 1 + \tfrac{4}{5}m_4(A). \end{aligned}$$

Dit stelsel oplossen geeft,

$$m_4(A) = 5, \quad m_3(A) = \tfrac{9}{2}, \quad m_2(A) = \tfrac{17}{4}, \quad m_1(A) = \tfrac{33}{8}.$$

Het gevraagde antwoord is dus $\frac{33}{8} = 4.125$ jaar.

b) Laat q_i de kans zijn dat je ooit toestand 3 bereikt wanneer je start in toestand i. Dan

$$q_1 = \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1}{4}q_2, \quad q_2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}q_2.$$

Dus $q_2 = \frac{1}{2}$ en $q_1 = \frac{1}{4}$. De kans om ooit salarisschaal 3 te bereiken is dus $\frac{1}{4}$.

c) Laat v_i het verwachte aantal jaren zijn dat een werknemer zich in salarisschaal i bevindt. Dan geldt

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}v_1, \\ v_2 &= \tfrac{1}{4}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2, \\ v_3 &= \tfrac{1}{4}v_2 + \tfrac{1}{2}v_3, \\ v_4 &= \tfrac{1}{4}v_3 + \tfrac{4}{5}v_4. \end{aligned}$$

Dit stelsel oplossen geeft,

$$v_1 = 2, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = \tfrac{1}{2}, \quad v_4 = \tfrac{5}{8}.$$

De werknemer bevindt zich gemiddeld 2 jaar in salarisschaal 1, 1 jaar in salarisschaal 2, 0.5 jaar in salarisschaal 3 en 0.625 jaar in salarisschaal 4. Merk op dat de som van deze 4 getallen gelijk is aan 4.125, het antwoord in a.

d) Los op $s = r + s \cdot Q$ met $r = (8, 2, 1, 0)$ en

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

De oplossing wordt gegeven door $s = (16, 12, 8, 10)$.

e) Het antwoord is $\frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{1}{4} \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{5} \cdot 10 = 11$. Dit is natuurlijk ook gelijk aan $8 + 2 + 1$, het aantal nieuwe werknemers dat per jaar wordt aangetrokken.

2. a) De 5 toestanden van de Markov keten zijn

   Toestand 1: A en B werken,
   Toestand 2: A werkt en B kapot,
   Toestand 3: A kapot en B werkt,
   Toestand 4: A en B kapot + reparateur werkt aan B,
   Toestand 5: A en B kapot + reparateur werkt aan A.

   De intensiteitenmatrix wordt gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Normeringsvergelijking: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$. Balansvergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}p_1 &= p_2 + p_3, \\ \tfrac{5}{4}p_2 &= \tfrac{1}{2}p_1 + p_5, \\ \tfrac{3}{2}p_3 &= \tfrac{1}{4}p_1 + p_4, \\ p_4 &= \tfrac{1}{4}p_2, \\ p_5 &= \tfrac{1}{2}p_3. \end{aligned}$$

   c) Gevraagd $m_1(A)$ met $A = \{4, 5\}$.

$$\begin{aligned} m_1(A) &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}m_2(A) + \tfrac{1}{3}m_3(A), \\ m_2(A) &= \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5}m_1(A), \\ m_3(A) &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}m_1(A). \end{aligned}$$

   Er volgt

$$m_1(A) = \tfrac{94}{11} \text{ dag.}$$

   d) De reparateur kan 7 machines per week repareren en hij werkt de helft van de tijd. Het verwachte aantal machines dat per week door de reparateur wordt gerepareerd is dus 3.5 machines per week.

   e) $L_{rep} = \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{8}$ en $\lambda_{rep} = \frac{1}{2}$ machine per dag. Dus $W_{rep} = L_{rep}/\lambda_{rep} = \frac{5}{4}$ dag.

3. a) Het is een $M/D/1$ met

$$\begin{aligned} \lambda &= 5 \text{ jobs per uur }, \\ \tau &= \tfrac{1}{6} \text{ uur }, \\ \rho &= \lambda\tau = \tfrac{5}{6}, \\ s^2 &= \tfrac{1}{36} \text{ uren}^2. \end{aligned}$$

   Hieruit volgt

$$W_q = \frac{\lambda s^2}{2(1-\rho)} = \frac{5/36}{2/6} = \frac{5}{12} \text{ uur } = 25 \text{ minuten .}$$

   De doorlooptijd is dus gelijk aan $W_q + \tau = 35$ minuten.

b) Er geldt $\lambda = 5$ en $\tau = \frac{1}{6}(1-\alpha) + \frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\alpha$. Om een stabiele situatie te hebben moet gelden dat $\lambda\tau < 1$, oftewel $\frac{5}{12}\alpha < \frac{1}{6}$, oftewel $\alpha < \frac{2}{5}$.

c) Het is nu een $M/G/1$ wachtrij met

$$\begin{aligned} \lambda &= 5 \text{ jobs per uur },\\ \tau &= \tfrac{11}{60} \text{ uur },\\ \rho &= \lambda\tau = \tfrac{11}{12},\\ s^2 &= \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{4}{5}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{5}{144} \text{ uren}^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$W_q = \frac{\lambda s^2}{2(1-\rho)} = \frac{25/144}{1/6} = \frac{25}{24} \text{ uur } = 62.5 \text{ minuten.}$$

De doorlooptijd is dus gelijk aan $W_q + \tau = 73.5$ minuten.

4. a) De machine kan gemodelleerd worden door een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{$ allebei werken , A werkt , B werkt , allebei stuk$\}$ en intensiteitenmatrix (tijdseenheid: maand)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De levensduur $E(T_1)$ van de machine volgt uit de berekening van de first passage time van toestand 1 naar toestand 4 van deze continue-tijd Markov keten.

$$\begin{aligned} m_1(4) &= 2/3 + 1/3 m_2(4) + 2/3 m_3(4),\\ m_2(4) &= 1,\\ m_3(4) &= 2. \end{aligned}$$

We hebben dus $E(T_1) = m_1(4) = \frac{7}{3}$ jaar. De lange-termijn gemiddelde vervangingskosten volgen nu uit de formule $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 7000$ en $E(T_1) = \frac{7}{3}$ en zijn dus gelijk aan 3000 euro per jaar.

b) De gemiddelde tijd tussen 2 vervangingen is nu 2 jaar (= de levensduur van onderdeel B). De gemiddelde kosten van een vervanging zijn $2/3 \cdot 7000 + 1/3 \cdot 5000 = 6333.33$ euro De lange-termijn gemiddelde vervangingskosten per jaar zijn dus gelijk aan $6333.33/2 = 3166.67$ euro per jaar.