TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21), 16 april 2010, 14.00-17.00 uur.

---

1. a) $p_{1,0} = P(\text{vraag} \geq 4) = 0.087$.
   Tweede + vijfde rij identiek: In beide gevallen geldt dat de voorraad op maandagochtend gelijk is aan 4. De kansverdeling van de voorraad op vrijdagmiddag is dus in beide gevallen ook gelijk.

   b) Gevraagd: $m_3(A)$ met $A = \{0, 1\}$.

   $$\begin{aligned} m_3(A) &= 1 + 0.260\ m_2(A) + 0.077\ m_3(A), \\ m_2(A) &= 1 + 0.077\ m_2(A). \end{aligned}$$

   Er volgt dat $m_2(A) = 1.084$ en $m_3(A) = 1.389$.

   c) $52\,(\pi_0 + \pi_1) = 32.14$.

   d) Verwachte vraag die per week verloren gaat:

   $$\begin{aligned} &(\pi_0 + \pi_3) \cdot (0.077 \cdot 1 + 0.010 \cdot 2) + \\ &(\pi_1 + \pi_4) \cdot (0.010 \cdot 1) + \\ &\pi_2 \cdot (0.230 \cdot 1 + 0.077 \cdot 2 + 0.010 \cdot 3) = 0.146. \end{aligned}$$

   Verwachte vraag die per jaar verloren gaat is dus $52 \cdot 0.146 = 7.6$.
   Alternatieve redenering:
   Per jaar worden er in verwachting $32.14 * 3 = 96.4$ produkten besteld en dus ook in verwachting verkocht. Aangezien de totale vraag in verwachting 104 produkten per jaar is, gaat er dus in verwachting $104 - 96.4 = 7.6$ vraag per jaar verloren.

   e) Toestandsruimte: $S = \{2, 3, 4\}$.
   Overgangsmatrix:

   $$P = \begin{pmatrix} 0.077 & 0.663 & 0.260 \\ 0.260 & 0.394 & 0.346 \\ 0.346 & 0.347 & 0.307 \end{pmatrix}.$$

2. a) Bij toestandsruimte $S = \{(0, -), (0, +), (1, +), (2, +), (3, +), (4, +)\}$ en tijdseenheid uur wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

   $$R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) $p(4, +) = 12\%$ van de orders.

   c) $24 \cdot 3 \cdot (1 - p(0, -)) = 58.2$ batches per dag.

d) Per dag worden er gemiddeld $24 \cdot 4 \cdot (1 - p(4,+)) = 84.5$ produkten geproduceerd in $24 \cdot 3 \cdot (1 - p(0,-)) = 58.2$ batches. In een batch zitten dus gemiddeld $84.5/58.2 = 1.45$ produkten.

e) Bij toestandsruimte $S = \{(0,-),(0,+),(1,-),(1,+),(2,+),(3,+),(4,+)\}$ en tijdseenheid uur wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Bij toestandsruimte $S = \{0,1,2,3,4\}$ en tijdseenheid uur wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

The limiting distribution is given by

$$p_0 = p_1 = p_2 = \tfrac{15}{59},\ p_3 = \tfrac{10}{59},\ p_4 = \tfrac{4}{59}.$$

b) $L` = 91/59$ and $\lambda = 4$. Hence $W = L/\lambda = 0.386$ uur $= 23.1$ minuten.

c) Gevraagd: $m_1(A)$ met $A = \{0\}$.

$$\begin{aligned} m_1(A) &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} m_2(A), \\ m_2(A) &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} m_1(A) + \tfrac{1}{2} m_3(A), \\ m_3(A) &= \tfrac{1}{10} + \tfrac{3}{5} m_2(A) + \tfrac{2}{5} m_4(A), \\ m_4(A) &= \tfrac{1}{10} + m_3(A). \end{aligned}$$

4. a) Gebruik de formule $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$. In dit geval geldt $E(C_1) = 2000$ en

$$E(T_1) = E(L_1) = \int_0^4 t\, f(t)\, dt = \int_0^2 t\, \tfrac{1}{4} t\, dt + \int_2^4 t\, (1 - \tfrac{1}{4} t)\, dt = 2.$$

Hieruit volgt $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = 2000/2 = 1000$ euro.

b) Er geldt

$$E(T_1) = E(\min(L_1, 2)) = \int_0^2 t\, \tfrac{1}{4} t\, dt + \int_2^4 2\, (1 - \tfrac{1}{4} t)\, dt = \tfrac{5}{3}$$

en

$$E(C_1) = P(L_1 < 2) \cdot 2000 + P(L_1 > 2) \cdot 1000 = 1500$$

en dus $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1) = 900$ euro.