TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR (2DD27), 9 november 2011, 14.00-17.00 uur.

---

1. a) De eindklassen zijn $E_1 = \{6\}$ en $E_2 = \{3,4,7\}$. De doorgangstoestanden zijn $C = \{1,2,5\}$.

   b) Er zijn 3 mogelijke paden:
   $1-5-2-5-2-5$ Kans: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = 0.0093$
   $1-1-1-5-2-5$ Kans: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = 0.0062$
   $1-1-1-1-1-5$ Kans: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = 0.0041$
   De gevraagde kans is dus $0.0093 + 0.0062 + 0.0041 = 0.0196$.

   c) Gevraagd: $m_1(A)$ met $A = \{3,4,6,7\}$. Er geldt

$$\begin{aligned} m_1(A) &= 1 + \tfrac{1}{3}m_1(A) + \tfrac{1}{3}m_5(A), \\ m_2(A) &= 1 + \tfrac{1}{3}m_5(A), \\ m_5(A) &= 1 + \tfrac{1}{2}m_2(A). \end{aligned}$$

   Stelsel oplossen geeft $m_1(A) = \frac{12}{5}$, $m_2(A) = \frac{8}{5}$, $m_5(A) = \frac{9}{5}$. Het antwoord is dus $m_1(A) = \frac{12}{5}$.

   d) Definieer p_i als de kans om nooit in toestand 4 te komen bij start in toestand i. Dan geldt

$$\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{1}{3}p_1 + \tfrac{1}{3}p_5, \\ p_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}p_5, \\ p_5 &= \tfrac{1}{2}p_2. \end{aligned}$$

   Stelsel oplossen geeft $p_1 = \frac{1}{5}$, $p_2 = \frac{4}{5}$, $p_5 = \frac{2}{5}$. Het antwoord is dus $p_1 = \frac{1}{5}$.

   e) Er geldt $q_{1,E_1} = \frac{1}{5}$ en $q_{1,E_2} = \frac{4}{5}$. Binnen E_1 geldt de limietverdeling $\pi_6 = 1$. Binnen E_2 geldt de limietverdeling $\pi_3 = \pi_4 = \frac{3}{8}$, $\pi_7 = \frac{2}{8}$. De totale limietverdeling wordt dus gegeven door:

$$\pi = (0, 0, \tfrac{3}{10}, \tfrac{3}{10}, 0, \tfrac{2}{10}, \tfrac{2}{10}).$$

2. a) Bij toestandsruimte $S = \{0, 1^{fast}, 1^{slow}, 2, 3\}$ wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Instroom = Uitstroom:

$$\begin{aligned} 2p_0 &= 2p_1^{fast} + p_1^{slow}, \\ 4p_1^{fast} &= 2p_0 + p_2, \\ 3p_1^{slow} &= 2p_2, \\ 5p_2 &= 2p_1^{fast} + 2p_1^{slow} + 3p_3, \\ 3p_3 &= 2p_2. \end{aligned}$$

   Normalisatievergelijking: $p_0 + p_1^{fast} + p_1^{slow} + p_2 + p_3 = 1$.

b) $\rho^{fast} = p_1^{fast} + p_2 + p_3 = \frac{15}{26}, \quad \rho^{slow} = p_1^{slow} + p_2 + p_3 = \frac{14}{26}.$

c) Snelle machine doet $\frac{15}{13}$ orders per uur. Langzame machine doet $\frac{7}{13}$ orders per uur. Verloren gaan $\frac{4}{13}$ orders per uur. Dus deel orders verloren is $\frac{4}{26}$, deel orders op snelle machine is $\frac{15}{26}$ en deel orders op langzame machine is $\frac{7}{26}$.

d) $W = L/[\lambda(1-p_3)] = 3/4$ uur

3. a) Bij toestandsruimte $S = \{W_1, W_2, W_3, R_1, R_2\}$ wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbij geven de toestanden W_1, W_2 en W_3 de goed, redelijk en slecht werkende machine weer. De toestanden R_1 en R_2 geven de 2 delen van de reparatie weer.

b) De limietverdeling wordt gegeven door

$$\pi = (\tfrac{6}{21}, \tfrac{6}{21}, \tfrac{6}{21}, \tfrac{2}{21}, \tfrac{1}{21}).$$

De winstvector door

$$c = (2000, 1500, 1000, -420, -630).$$

Hieruit volgt dat de lange-termijn gemiddelde winst per dag gelijk is aan $\sum_{i=1}^{5} \pi_i c_i = 1215.70$.

c) Bij toestandsruimte $S = \{W_1, W_2, R_1, R_2\}$ wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De limietverdeling wordt gegeven door

$$\pi = (\tfrac{6}{15}, \tfrac{6}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{1}{15}).$$

De winstvector door

$$c = (2000, 1500, -420, -630).$$

Hieruit volgt dat de lange-termijn gemiddelde winst per dag gelijk is aan $\sum_{i=1}^{4} \pi_i c_i = 1302$.

4. a) De relatieve bezoekfrequenties v_1, v_2 en v_3 verhouden zich als 1:1:1. Hieruit volgt dat de relatieve bezettingsgraden v_1/μ_1, v_2/μ_2 en v_3/μ_3 zich verhouden als 4:3:5. Dus $p(k_1, k_2, k_3) = C \cdot 4^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}$.

b) De doorzet van station 3 is $\frac{3}{5} \cdot (1 - p_3(0)) = 0.515$ bewerkingen per uur. Het gemiddeld aantal jobs in station 3 is 2.51. Met behulp van de formule van Little volgt dan dat de gemiddelde tijd dat een job zich in station S_3 bevindt gelijk is aan $\frac{2.51}{0.515} = 4.874$ uur.

c) Doorzet systeem is $\frac{3}{4}$ maal het aantal bewerkingen dat per uur in station S_3 wordt uitgevoerd. Dit is gelijk aan 0.386 jobs per uur, Met behulp van de formule van Little volgt $W_{tot} = \frac{5}{0.386} = 12.95$ uur.