TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR (2DD27), 6 november 2012, 09.00-12.00 uur.

---

1. a)
$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned}
\pi_{(0,0)} &= \tfrac{1}{4}\pi_{(0,0)} + \tfrac{1}{4}\pi_{(0,1)}, \\
\pi_{(1,0)} &= \tfrac{3}{4}\pi_{(0,0)} + \tfrac{1}{4}\pi_{(1,0)} + \tfrac{3}{4}\pi_{(0,1)} + \tfrac{1}{4}\pi_{(1,1)}, \\
\pi_{(0,2)} &= \tfrac{3}{4}\pi_{(1,0)} + \tfrac{3}{4}\pi_{(1,1)}, \\
\pi_{(0,1)} &= \tfrac{1}{4}\pi_{(0,2)}, \\
\pi_{(1.1)} &= \tfrac{3}{4}\pi_{(0,2)}.
\end{aligned}$$

Normalisatievergelijking: $\pi_{(0,0)} + \pi_{(1,0)} + \pi_{(0,2)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1.1)} = 1$.

c) $2 \cdot \pi_{(0,2)} = 3/4$.

d) $2 \cdot \left(\pi_{(0,2)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)}\right) = 3/2$.

e) Gevraagd: $m_{(0,2)}(A)$ met $A = \{(0,0),(1,0)\}$. Er geldt

$$\begin{aligned}
m_{(0,2)}(A) &= 1 + \tfrac{1}{4}m_{(0,1)}(A) + \tfrac{3}{4}m_{(1,1)}(A), \\
m_{(0,1)}(A) &= 1, \\
m_{(1,1)}(A) &= 1 + \tfrac{3}{4}m_{(0,2)}(A).
\end{aligned}$$

Stelsel oplossen geeft $m_{(0,2)}(A) = \frac{32}{7}$.

2. a) Bij toestandsruimte $S = \{(3;3), (2;1), (2;2), (1;0), (0;0)\}$ wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Instroom = Uitstroom:

$$\begin{aligned}
3p_{(3,3)} &= 4p_{(2,1)} + 2p_{(2,2)}, \\
6p_{(2,1)} &= 3p_{(3,3)} + 2p_{(1,0)}, \\
4p_{(2,2)} &= 4p_{(1,0)}, \\
7p_{(1,0)} &= 2p_{(2,1)} + 2p_{(2,2)} + 6p_{(0,0)}, \\
6p_{(0,0)} &= 1p_{(1,0)}.
\end{aligned}$$

Normalisatievergelijking: $p_{(3,3)} + p_{(2,1)} + p_{(2,2)} + p_{(1,0)} + p_{(0,0)} = 1$.
Stelsel oplossen geeft:

$$p_{(3,3)} = \frac{20}{45}, \quad p_{(2,1)} = \frac{12}{45}, \quad p_{(2,2)} = \frac{6}{45}, \quad p_{(1,0)} = \frac{6}{45}, \quad p_{(0,0)} = \frac{1}{45}.$$

c) bezettinsgraad ervaren reparateur: $p_{(2,1)} + p_{(1,0)} + p_{(0,0)} = \frac{19}{45}$.
bezettinsgraad onervaren reparateur: $p_{(2,2)} + p_{(1,0)} + p_{(0,0)} = \frac{13}{45}$.

d) Ervaren reparateur doet $4 \cdot \frac{19}{45} = \frac{76}{45}$ reparaties per tijdseenheid. Onervaren reparateur doet $2 \cdot \frac{13}{45} = \frac{26}{45}$ reparaties per tijdseenheid. Samen doen ze dus $\frac{102}{45}$ reparaties per tijdseenheid.

e) Gevraagd: $m_{(1;0)}(A)$ met $A = \{(3;3), (2;1), (2;2)\}$.

$$\begin{aligned} m_{(1;0)}(A) &= \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} m_{(0;0)}(A), \\ m_{(0;0)}(A) &= \tfrac{1}{6} + m_{(1;0)}(A). \end{aligned}$$

Er volgt dat $m_{(1;0)}(A) = \frac{7}{36}$.

3. a) Voor de gemiddeld produktietijd geldt

$$E(Y) = \int_0^2 u\, f(u)\, du = 1 \text{ minuut } = \frac{1}{60} \text{ uur.}$$

het systeem is dus stabiel als $\lambda < 60$.

b) Bezettinsgraad: $\rho = \lambda \cdot \tau = \frac{5}{6}$.
Verwachte resterende productietijd van de job bij de machine (tijdseenheid: minuut): $E(S) = \lambda \frac{s^2}{2}$ met $\lambda = 5/6$ en $s^2 = \int_0^2 u^2\, f(u)\, du = \frac{7}{6}$. We krijgen $E(S) = \frac{35}{72}$ minuut.
Gemiddeld aantal jobs in het systeem:

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 s^2}{2(1-\rho)} = \frac{235}{72} \approx 3.264.$$

4. a) De 15 verschillende toestanden zijn: (4,0,0), (3,1,0), (3,0,1), (2,2,0), (2,1,1), (2,0,2), (1,3,0), (1,2,1), (1,1,2), (1,0,3), (0,4,0), (0,3,1), (0,2,2), (0,1,3), (0,0,4).
De relatieve bezoekfrequenties v_1, v_2 en v_3 voldoen aan het stelsel

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{2} v_1 + \tfrac{3}{4} v_3, \\ v_2 &= \tfrac{1}{2} v_1 + \tfrac{1}{3} v_2, \\ v_3 &= \tfrac{2}{3} v_2 + \tfrac{1}{4} v_3, \end{aligned}$$

en verhouden zich als 12:9:8. De bedieningsintensiteiten worden gegeven door $\mu_1 = 12, \mu_2 = 9$ en $\mu_3 = 8$. Hieruit volgt dat de relatieve bezettingsgraden v_1/μ_1, v_2/μ_2 en v_3/μ_3 zich verhouden als 1:1:1. Dus $p(k_1, k_2, k_3) = C = \frac{1}{15}$.

b) De doorzet van station 1 is $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ bewerkingen per uur. De doorzet van station 2 is $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ bewerkingen per uur. De doorzet van station 3 is $\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$ bewerkingen per uur.

c) Het gemiddeld aantal jobs in station 1,2 en 3 is 4/3. Met behulp van de formule van Little volgt dan dat de gemiddelde tijd dat een job zich in station S_1 bevindt gelijk is aan $\frac{4/3}{8} = \frac{1}{6}$ uur = 10 minuten. De gemiddelde tijd dat een job zich in station S_2 bevindt gelijk is aan $\frac{4/3}{6} = \frac{2}{9}$ uur = 13.33 minuten. De gemiddelde tijd dat een job zich in station S_3 bevindt gelijk is aan $\frac{4/3}{16/3} = \frac{1}{4}$ uur = 15 minuten.

d) Doorzet systeem is $\frac{3}{4}$ maal het aantal bewerkingen dat per uur in station S_3 wordt uitgevoerd. Dit is gelijk aan 4 jobs per uur, Met behulp van de formule van Little volgt $W_{tot} = \frac{4}{4} = 1$ uur.