TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21/2DD27), 2 november 2010, 09.00-12.00 uur.

---

1. a) $p_{2,2} \cdot (p_{2,2} + p_{2,3}) + p_{2,3} \cdot (p_{3,2} + p_{3,3} + p_{3,4}) = 0.30 \cdot 0.65 + 0.35 \cdot 0.90 = 0.51.$

   b) Gevraagd $m_2(A)$ met $A = \{0, 1\}$. Deze kan berekend worden m.b.v. het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} m_2(A) &= 1 + 0.30 m_2(A) + 0.35 m_3(A), \\ m_3(A) &= 1 + 0.25 m_2(A) + 0.30 m_3(A) + 0.35 m_4(A), \\ m_4(A) &= 1 + 0.10 m_2(A) + 0.25 m_3(A) + 0.65 m_4(A). \end{aligned}$$

   c) Gemiddeld geproduceerd per dag: $2 \cdot (\pi_2 + \pi_3 + \pi_4) = 1.7644$.
   Gemiddeld aantal nieuwe orders per dag: 1.9.
   Gemiddeld aantal verloren orders per dag: $1.9 - 1.7644 = 0.1356$.
   Dit is $0.1356/1.9 \approx 7.14\%$ van het totaal aantal nieuwe orders.

   d) Kostenvector: $c = (0, 100, 0, 100, 200)$.
   Lange termijn verwachte boetekosten per dag: $g = \sum_j \pi_j c(j) = 116.13$ euro.

   e) Toestandsruimte: $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (oneindig veel toestanden!) Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0 & \ldots \\ 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

2. a) Bij toestandsruimte $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$ wordt de intensiteitenmatrix (tijdseenheid: uur) gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) De doorzet van het produktiesysteem is $10 \cdot (1 - p_{(2,1)}) = 7.72$ orders per uur.

   c) Gebruik de formule van Little. Het gemiddeld aantal orders bij de machines is

$$L = 1 \cdot \Big(p_{(1,0)} + p_{(0,1)}\Big) + 2 \cdot \Big(p_{(1,1)} + p_{(2,0)}\Big) + 3 \cdot p_{(2,1)} \approx 1.629.$$

   Het gemiddeld aantal per uur geproduceerde orders is 7.72. De gemiddelde produktietijd van een order is dus $1.629/7.72 \approx 0.211$ uur ≈ 12.66 minuten.

d) Bij toestandsruimte $S = \{(0,0),(1,0),(2,0),(2,1)\}$ wordt de intensiteitenmatrix (tijdseenheid: uur) nu gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Normeringsvergelijking: $p_{(0,0)} + p_{(1,0)} + p_{(2,0)} + p_{(2,1)} = 1$. Snedevergelijkingen

$$\begin{aligned} 10p_{(0,0)} &= 5p_{(1,0)}, \\ 10p_{(1,0)} &= 10p_{(2,0)}, \\ 10p_{(2,0)} &= 14p_{(2,1)}. \end{aligned}$$

De limietverdeling volgt uit combinatie van normeringsvergelijking + snedevergelijkingen:

$$p_{(0,0)} = \tfrac{7}{45}, \quad p_{(1,0)} = \tfrac{14}{45}, \quad p_{(2,0)} = \tfrac{14}{45}, \quad p_{(2,1)} = \tfrac{10}{45}.$$

e) De doorzet van het produktiesysteem is $10 \cdot (1 - p_{(2,1)}) = \frac{70}{9} = 7.78$ orders per uur.

f) Gebruik de formule van Little. Het gemiddeld aantal orders bij de machines is

$$L = 1 \cdot p_{(1,0)} + 2 \cdot p_{(2,0)} + 3 \cdot p_{(2,1)} = 1.6.$$

Het gemiddeld aantal per uur geproduceerde orders is 7.78. De gemiddelde produktietijd van een order is dus $1.6/7.78 \approx 0.2057$ uur ≈ 12.34 minuten.

3. a) $M/G/1$ wachtrij met $\tau = 1/6$ minuut. Om een stabiele situatie te hebben moet gelden dat $\lambda\tau < 1$, en dus $\lambda < 6$.

b) Er geldt

$$\begin{aligned} \lambda &= 5 \text{ kratten per minuut }, \\ \tau &= 1/6 \text{ minuut }, \\ \rho &= \lambda\tau = \frac{5}{6}, \\ s^2 &= \frac{1}{36} \text{ minuten}^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$L_q = \frac{\lambda^2 s^2}{2(1-\rho)} = \frac{25/36}{2/6} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.$$

c) We hebben

$$W_q = \frac{\lambda s^2}{2(1-\rho)} = \frac{5/36}{2/6} = \frac{5}{12} \text{ minuut } = 25 \text{ seconden }.$$

Dit geeft

$$W = \frac{1}{12} + W_q = \frac{1}{2} \text{ minuut } = 30 \text{ seconden }.$$

Let op: Er geldt niet $W = \tau + W_q$ hier omdat een krat de lift al na 5 seconden verlaat!

4. a) De gevraagde kans wordt gegeven door

$$\int_{u=1.5}^{2} f(u)du = \int_{u=1.5}^{2} (2-u)du = \left(2u - \tfrac{1}{2}u^2\right)_{u=1.5}^{2} = \tfrac{1}{8}.$$

b) De kans dat de machine binnen een jaar stuk gaat is

$$F(1) = \int_{u=0}^{1} f(u)du = \int_{u=0}^{1} udu = \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_{u=0}^{1} = \tfrac{1}{2}.$$

De verwachte kosten per vervanging zijn dus

$$E(C_1) = F(1) \cdot 3000 + (1 - F(1)) \cdot 2000 = 2500 \text{ euro} .$$

De verwachte tijd tussen 2 vervangingen wordt gegeven door

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \int_{u=0}^{1} uf(u)du + \int_{u=1}^{2} 1f(u)du \\ &= \int_{u=0}^{1} u^2du + \int_{u=1}^{2} (2-u)du \\ &= \left(\tfrac{1}{3}u^3\right)_{u=0}^{1} + \left(2u - \tfrac{1}{2}u^2\right)_{u=1}^{2} \\ &= \tfrac{5}{6} \text{ jaar} . \end{aligned}$$

De lange-termijn gemiddelde kosten per jaar worden nu $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 2500$ euro en $E(T_1) = \frac{5}{6}$ jaar. Het antwoord is dus 3000 euro per jaar.