

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Toets Stochastische OR (2DD18/DD21), 6 november 2008.

1. a) $p_{2,0} = 0.48 \cdot \frac{1}{4} = 0.12$.
(0 aankomsten + 2 vertrekken)
 $p_{2,1} = 0.36 \cdot \frac{1}{4} + 0.48 \cdot \frac{1}{2} = 0.33$.
(1 aankomst + 2 vertrekken) of (0 aankomsten + 1 vertrek)
 $p_{2,2} = 0.12 \cdot \frac{1}{4} + 0.36 \cdot \frac{1}{2} + 0.48 \cdot \frac{1}{4} = 0.33$.
(2 aankomsten + 2 vertrekken) of (1 aankomst + 1 vertrek) of (0 aankomsten + 0 vertrekken)
 $p_{2,3} = 0.04 \cdot \frac{1}{4} + 0.12 \cdot \frac{1}{2} + 0.36 \cdot \frac{1}{4} = 0.16$.
(3 aankomsten + 2 vertrekken) of (2 aankomsten + 1 vertrek) of (1 aankomst + 0 vertrekken)
 $p_{2,4} = 0.04 \cdot \frac{1}{2} + 0.12 \cdot \frac{1}{4} + 0.04 \cdot \frac{1}{4} = 0.06$.
(3 aankomsten + 1 vertrek) of (2 aankomsten + 0 vertrekken) of (3 aankomsten + 0 vertrekken)
- b) Lees occupatietijden af in eerste rij van $M(59)$: (12.72, 17.23, 13.89, 9.28, 6.88).
De gevraagde getallen zijn nu $12.72/60 = 0.212$ (deel van het uur dat er geen kassa bezet is), $17.23/60 = 0.287$ (deel van het uur dat er 1 kassa bezet is) en $(13.89+9.28+6.88)/60 = 0.501$ (deel van het uur dat er 2 kassa's bezet zijn).
- c) De opbrengstvector is $c = (0, 10, 20, 20, 20)$. Met behulp van MAXIM vinden we dan: totale verwachte opbrengst in het eerste uur is 773,3 euro (let op: $n = 59$).
- d) Gevraagd: $m_1(A)$ met $A = \{0, 2, 3, 4\}$. Antwoord (met MAXIM): 1.724.
(Alternatief: los vergelijking $m_1(A) = 1 + 0.42m_1(A)$ op.
- e) De limietverdeling volgt met MAXIM: $\pi = \pi^* = \hat{\pi} = (0.187, 0.286, 0.239, 0.164, 0.124)$.
Per minuut worden dus gemiddeld op den lange duur
- $$0.286 \cdot \frac{1}{2} + (0.239 + 0.164 + 0.124) \cdot 1 = 0.67$$
- klanten bediend. Er arriveren gemiddeld 0.72 klanten per minuut. Het deel van de klanten dat verloren gaat is dus $0.05/0.72 * 100\% = 6.95\%$.
- f) De toestandstuijme wordt nu $S = \{0, 1, 2^-, 2^+, 3, 4\}$, waarbij 2^- de toestand is met 2 klanten bij de kassa's en 1 kassa open en 2^+ de toestand is met 2 klanten bij de kassa's en 2 kassa's open. De overgangsmatrix in de nieuwe situatie wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.36 & 0.12 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0.24 & 0.42 & 0.24 & 0 & 0.08 & 0.02 \\ 0 & 0.24 & 0.42 & 0 & 0.24 & 0.10 \\ 0.12 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0.16 & 0.06 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0.33 & 0.33 & 0.22 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.33 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

2. a) De toestandsruimte is $S = \{A_1, A_{\geq 2}, B_1, B_{\geq 2}, \text{gestopt}, \text{geslaagd}\}$. De overgangsmatrix is

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.30 & 0.60 & 0 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.50 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.10 & 0.60 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Laat $q_{A_1, \text{geslaagd}}$ de kans zijn om ooit toestand geslaagd te bereiken bij start in A_1 . Dan geldt

$$\begin{aligned} q_{A_1, \text{geslaagd}} &= 0.3q_{A_2, \text{geslaagd}} + 0.6q_{B_1, \text{geslaagd}}, \\ q_{A_2, \text{geslaagd}} &= 0.25q_{A_2, \text{geslaagd}} + 0.5q_{B_1, \text{geslaagd}}, \\ q_{B_1, \text{geslaagd}} &= 0.6 + 0.3q_{B_2, \text{geslaagd}}, \\ q_{B_2, \text{geslaagd}} &= 0.5 + 0.25q_{B_2, \text{geslaagd}}. \end{aligned}$$

Het gevraagde antwoord is $q_{A_1, \text{geslaagd}} = 0.64$.

c) De kans dat de student onderdeel A haalt is gelijk aan de kans dat de student ooit toestand B_1 bereikt. Noteer met q_{A_1, B_1} de kans om ooit toestand B_1 te bereiken bij start in A_1 . Dan geldt

$$\begin{aligned} q_{A_1, B_1} &= 0.6 + 0.3q_{A_2, B_1}, \\ q_{A_2, B_1} &= 0.5 + 0.25q_{A_2, B_1}. \end{aligned}$$

Er volgt $q_{A_1, B_1} = 0.8$. De kans dat een student onderdeel A WEL succesvol afrondt en onderdeel B NIET is gelijk aan $q_{A_1, B_1} - q_{A_1, \text{geslaagd}} = 0.8 - 0.64 = 0.16$.

d) Het verwachte aantal keer dat een student een deeltentamen doet = first passage time van A_1 naar $\{\text{gestopt}, \text{geslaagd}\} = 2.52$.

Het verwachte aantal keer dat een student deeltentamen A doet = first passage time van A_1 naar $\{B_1, B_{\geq 2}, \text{gestopt}, \text{geslaagd}\} = 1.4$.

Het verwachte aantal keer dat een student deeltentamen B doet = $2.52 - 1.4 = 1.12$.