TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Toets Stochastische OR (2DD27), 27 september 2012.

---

1. a) De toestandsruimte is $S = \{RR, DR, RD, DD\}$, waarbij DR bijvoorbeeld weergeeft dat het gisteren droog was en vandaag regent. De overgangsmatrix is

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

b) $a^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$ beschrijft het weer op 29 en 30 september.
$a^{(4)} = (0.3015, 0.1480, 0.1635, 0.3870)$ beschrijft het weer op 3 en 4 oktober.
$a^{(5)} = (0.2851, 0.1428, 0.1644, 0.4077)$ beschrijft het weer op 4 en 5 oktober.
De kans dat het op 4 oktober regenachtig is: $0.3015 + 0.1480 = 0.2851 + 0.1644 = 0.4495$.

c) Kijk in $M(14)$. Tijdstip 0 correspondeert met 29 + 30 september. Tijdstip 14 correspondeert met 13 + 14 oktober. Bij start in toestand DR bezoek je naar verwachting 4.0867 keer RR, 2.9526 keer DR, 2.5522 keer RD en 5.4084 keer DD gedurende de 15 tijdstippen $0, 1, \ldots 14$. In de eerste 2 weken van oktober is het dus naar verwachting $4.0867 + 2.9526 - 1 \approx 6.04$ dagen regenachtig en $2.5522 + 5.4084 \approx 7.96$ dagen droog.

d) Limietverdeling: $\pi = (0.25, 0.15, 0.15, 0.45)$.
Deel dagen droog: 0.15+0.40 = 0.60.
Deel dagen regenachtig: 0.25+0.15 = 0.40

e) First passage time van RD (= eerste droge dag) naar DR (=eerste regenachtige dag): 4
First passage time van DR (= eerste regenachtige dag) naar DR (=eerste droge dag): 8/3

2. a) Doorgangstoestanden: $C = \{2, 5, 6\}$
Eindklasse: $E_1 = \{3, 7\}$ is periodiek met periode 2.
Eindklasse: $E_2 = \{1, 4, 8\}$ is aperiodiek.

b) First passage time van toestand 2 naar verzameling $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$: 3.265

c) Laat $\tilde{g}(i)$ de totale verwachte kosten zijn bij start in toestand i. Dan geldt

$$\begin{aligned} \tilde{g}(2) &= 10 + \tfrac{1}{3} \cdot \tilde{g}(5) + \tfrac{1}{3} \cdot \tilde{g}(6) \\ \tilde{g}(5) &= 20 + \tfrac{1}{5} \cdot \tilde{g}(2) + \tfrac{2}{5} \cdot \tilde{g}(6) \\ \tilde{g}(6) &= 30 + \tfrac{1}{2}\tilde{g}(2) + \tfrac{1}{3} \cdot \tilde{g}(5). \end{aligned}$$

Oplossing: $\tilde{g}(2) = 57.96, \tilde{g}(5) = 63.67, \tilde{g}(6) = 80.20$.
(Of: uit matrix van occupatietijden (voor n heel groot) volgt dat het verwachte aantal bezoeken aan toestand 2 gelijk is aan 1.592, aan toestand 5 gelijk aan 0.816, aan toestand 6 gelijk aan 0.857. De totale verwachte kosten zijn dus 57.96.
(Of: bereken met MAXIM totale verwachte kosten (voor n heel groot) met kostenvector $(0, 10, 0, 0, 20, 30, 0)$: 57.96

d) 0. Er zijn alleen maar kosten in de doorgangstoestanden!

e) Laat q_i de kans dat bij start in i de Markov keten ooit in toestand 2 (terug) komt. Dan geldt

$$\begin{aligned} q_2 &= \tfrac{1}{3} \cdot q_5 + \tfrac{1}{3} \cdot q_6 \\ q_5 &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5} \cdot q_6 \\ q_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot q_5. \end{aligned}$$

Oplossing: $q_2 = \frac{29}{78} = 0.37, q_5 = \frac{6}{13} = 0.46, q_6 = \frac{17}{26} = 0.65.$