Clicker #A.1

Vraag: Voor iedere Markov keten $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2\}$ geldt:

A. $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$.

B. $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)$.

C. $P(X_2 = 2 \mid X_1 = 1,\ X_0 = 0) = P(X_2 = 2,\ X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$.

D. $P(X_2 = 2 \mid X_1 = 1,\ X_0 = 0) = P(X_2 = 2 \mid X_1 = 1)$.

Clicker #A.2

Gegeven zijn de matrices

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ en } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Vraag: Welke matrix is de overgangsmatrix van een Markov keten?

A. Alleen P_1.

B. Alleen P_2.

C. Zowel P_1 als P_2.

D. Geen van beiden.

Clicker #A.3

Beschouw het machine onderhoudsprobleem met 2 identieke machines die zich onafhankelijk van elkaar gedragen. Een werkende machine blijft met kans p de volgende dag werken. Een kapotte machine blijft met kans q de volgende dag kapot. Laat X_n het aantal werkende machines op dag n zijn.

Vraag: De 1-staps overgangskans $P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)$ wordt gegeven door:

A. pq.

B. $p + q$.

C. $(1 - p)(1 - q)$.

D. $pq + (1 - p)(1 - q)$.

Clicker #A.4

Beschouw het voorraadmodel met (s, S) policy. Als de voorraad op vrijdagmiddag kleiner dan s is, dan wordt zij in het weekend aangevuld tot S. Laat D_n de vraag in week n en X_n de voorraad op maandagochtend in week n zijn.

Vraag: Stel dat de stochastische variabelen D_n onafhankelijk zijn, maar *niet* identiek verdeeld. Dan geldt:

A. Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een tijdhomogene Markov keten.

B. Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een Markov keten, maar niet tijdhomogeen.

C. Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is geen Markov keten.

Clicker #A.5

Beschouw het voorraadmodel met (s, S) policy. Als de voorraad op vrijdagmiddag kleiner dan s is, dan wordt zij in het weekend aangevuld tot S. Laat D_n de vraag in week n en X_n de voorraad op maandagochtend in week n zijn.

Vraag: Stel dat de stochastische variabelen D_n *niet* onafhankelijk zijn. Dan geldt:

A. Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een tijdhomogene Markov keten.

B. Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een Markov keten, maar niet tijdhomogeen.

C. Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is geen Markov keten.

Clicker #B.1

Beschouw de Markov keten $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

De Markov keten start op tijdstip 0 in toestand 1.

Vraag: $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 2, X_5 = 2)$ is

A. $p^2 q^3$.

B. $p^3 q^3$.

C. $p^4 q$.

D. $p^5 q$.

Clicker #B.2

Beschouw de Markov keten $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraag: De 4-staps overgangskans $P(X_4 = 3 \,|\, X_0 = 1)$ is gelijk aan

A. $4/16$.

B. $5/16$.

C. $6/16$.

D. $8/16$.

Clicker #B.3

Beschouw de Markov keten $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraag: De kans dat de Markov keten op tijdstip 4 *voor het eerst* in toestand 3 zit, gegeven dat ze op tijdstip 0 in toestand 1 begon, is gelijk aan

A. $2/16$.

B. $3/16$.

C. $4/16$.

D. $8/16$.

Clicker #B.4

Beschouw de Markov keten $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraag: De totale verwachte tijd dat de Markov keten $\{X_n, n \geq 0\}$ zich in toestand 1 bevindt in de tijdspanne $\{0, 1, ..., 2\}$, gegeven dat ze op tijdstip 0 in toestand 1 begon, is gelijk aan

A. 1.

B. 3/2.

C. 2.

D. 5/2.

Conceptual 2.8

Consider a machine that works as follows. If it is up at the beginning of a day, it stays up at the beginning of the next day with probability p and fails with probability $1 - p$. It takes exactly 2 days for the repairs, at the end of which the machine is as good as new. Let X_n be the state of the machine at the beginning of day n, where the state is 0 if the machine has just failed, 1 if 1 days worth of repair work is done on it, and 2 if it is up. Show that $\{X_n : n \geq 0\}$ is a DTMC, and display its transition probability matrix.

Conceptual 2.9.

Items arrive at a machine shop in a deterministic fashion at a rate of one per minute. Each item is tested before it is loaded onto the machine. An item is found to be nondefective with probability p and defective with probability $1 - p$. If an item is found defective, it is discarded. Otherwise, it is loaded onto the machine. The machine takes exactly 1 minute to process the item, after which it is ready to process the next one. Let X_n be 0 if the machine is idle at the beginning of the n-th minute and 1 if it is starting the processing of an item. Show that $\{X_n : n \geq 0\}$ is a DTMC, and display its transition probability matrix.

Conceptual 2.10

Consider the system of Conceptual Problem 2.9. Now suppose the machine can process two items simultaneously. However, it takes 2 minutes to complete the processing. There is a bin in front of the machine where there is room to store two nondefective items. As soon as there are two items in the bin, they are loaded onto the machine and the machine starts processing them. Model this system as a DTMC.

Conceptual 2.11

Consider the system of Conceptual Problem 2.10. However, now suppose that the machine starts working on whatever items are waiting in the bin when it becomes idle. It takes 2 minutes to complete the processing whether the machine is processing one or two items. Processing on a new item cannot start unless the machine is idle. Model this as a DTMC.

Conceptual 2.12

The weather at a resort city is either sunny or rainy. The weather tomorrow depends on the weather today and yesterday as follows. If it was sunny yesterday and today, it will be sunny tomorrow with probability .9. If it was rainy yesterday but sunny today, it will be sunny tomorrow with probability .8. If it was sunny yesterday but rainy today, it will be sunny tomorrow with probability .7. If it was rainy yesterday and today, it will be sunny tomorrow with probability .6. Define todays state of the system as the pair (weather yesterday, weather today). Model this system as a DTMC, making appropriate independence assumptions.