Clicker #A.1

Beschouw de Markov ketens X_n en Y_n waarvan de 1-staps overgangsmatrices P_X en P_Y gegeven worden door

$$P_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } P_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vraag: Welke van de volgende beweringen is waar?

A. X_n en Y_n zijn beiden aperiodiek.

B. X_n en Y_n zijn beiden periodiek.

C. X_n is aperiodiek en Y_n is periodiek.

D. X_n is periodiek en Y_n is aperiodiek.

Clicker #A.2

Beschouw de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vraag: De Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ is

A. reducibel en periodiek.

B. reducibel en aperiodiek.

C. irreducibel en periodiek.

D. irreducibel en aperiodiek.

Clicker #A.3

Beschouw de Markov keten met 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vraag: Welke van de volgende beweringen is waar?

A. Limietverdeling, stationaire verdeling en occupatieverdeling zijn allen gelijk aan $(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$.

B. Stationaire verdeling en occupatieverdeling zijn gelijk aan $(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$. Limietverdeling bestaat niet.

C. Limietverdeling, stationaire verdeling en occupatieverdeling zijn allen gelijk aan $(1/6, 1/3, 1/6, 1/6, 1/6)$.

D. Stationaire verdeling en occupatieverdeling zijn gelijk aan $(1/6, 1/3, 1/6, 1/6, 1/6)$. Limietverdeling bestaat niet.

Clicker #A.4

Beschouw de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 5/12 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Vraag: Welke van de volgende beweringen is waar?

A. Eindklassen: $\{3, 6\}$ en $\{2, 7\}$. Doorgangstoestanden: $\{1, 4, 5\}$.
B. Eindklassen: $\{3, 6\}$ en $\{2, 5, 7\}$. Doorgangstoestanden: $\{1, 4\}$.
C. Eindklassen: $\{1, 3, 6\}$ en $\{2, 5, 7\}$. Doorgangstoestand: $\{4\}$.
D. Eindklassen: $\{1, 3, 4, 6\}$ en $\{2, 5, 7\}$.

Clicker #A.5

Beschouw een Markov keten met 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

- **Geval I:** De Markov keten start in toestand 1.
- **Geval II:** De Markov keten start in toestand 2.

Vraag: Wat is de limietverdeling?

A. In beide gevallen $(0, 0, 1/2, 1/8, 3/8)$.
B. Bij I: $(0, 0, 1, 0, 0)$. Bij II: $(0, 0, 0, 1/4, 3/4)$.
C. Bij I: $(0, 0, 3/5, 1/10, 3/10)$. Bij II: $(0, 0, 1/2, 1/8, 3/8)$.
D. Bij I: $(0, 0, 3/4, 1/16, 3/16)$. Bij II: $(0, 0, 3/8, 5/32, 15/32)$.

Clicker #B.1

Beschouw de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De Markov keten start op tijdstip 0 in toestand 1. De kosten per periode zijn 30 in toestand 1, 20 in toestand 2, 10 in toestand 3 en 0 in toestand 4.

Vraag: De lange-termijn verwachte kosten per periode zijn

A. 20.
B. 15.
C. 10.
D. 0.

Clicker #B.2

Beschouw de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De Markov keten start op tijdstip 0 in toestand 1. De kosten per periode zijn 30 in toestand 1, 20 in toestand 2, 10 in toestand 3 en 0 in toestand 4.

Vraag: De totale verwachte kosten over oneidige horizon zijn

A. 200.
B. 120.
C. 60.
D. 45.

Clicker #B.3

Beschouw de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bij de overgang $3 \longrightarrow 2$ moeten we 60 euro betalen. Bij de overgang $3 \longrightarrow 4$ moeten we 80 euro betalen.

Vraag: De lange-termijn verwachte kosten per periode zijn

A. 11.67 euro.
B. 20.00 euro.
C. 23.33 euro.
D. 40.00 euro.

Clicker #B.4

Beschouw de Markov keten met toestandsruimte $\{1, 2, 3, 4\}$ en met 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neem aan dat de Markov keten begint in toestand 1.

Vraag: De kans om *ooit* toestand 3 te bereiken wordt gegeven door

A. 0.13
B. 0.20
C. 0.32
D. 0.70

Clicker #B.5

Beschouw de Markov keten met toestandsruimte $\{1, 2, 3, 4\}$ en met 1-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neem aan dat de Markov keten begint in toestand 1.

Vraag: De totale verwachte tijd die doorgebracht wordt in de doorgangstoestanden wordt gegeven door

A. 5.6
B. 7.9
C. 14
D. 23.6

Handout, section 2, exercise 1

A car company has a number of mechanics that maintain the cars of the customers of the company. Within this group of mechanics three positions can be distinguished: $1 =$ trainee, $2 =$ junior mechanic, $3 =$ senior mechanic. At the end of each year the management looks at the structure of the group of mechanics.

It appears after the assessment of the management that next year: 40% of the trainees, present in the last year, is staying another year on the trainee post, that 10% of the present trainees will be working in the car company as junior mechanic and that 50% (fore some reason) will not be working anymore for the car company.
It appears furthermore that next year: 50% of the junior mechanics is staying another year in the same job, that 10% of the present junior mechanics will be working in the car company as senior mechanic and that 40% (fore some reason) will not be working anymore for the car company.
Finally appears that 80% of the present senior mechanics is staying in the car company next year and that 20% is leaving.

a) The management has the following recruitment policy: every time someone leaves the group of mechanics, a new trainee from outside is hired. The total number of mechanics is 39. Show that the expected long-run numbers of mechanics in the three positions 1, 2 and 3 are 30, 6 and 3.

b) The management changes the recruitment policy; every year a certain number of new employees may be recruted from outside for each of the three positions in the group of mechanics.

   i) At the beginning of a certain year 15 trainees, 3 junior mechanics and 1 senior mechanic are working for the car company. During that year the management intends to recruit 7 new trainees, 2 new junior mechanics and 1 new senior mechanic. Determine the expected number of trainees, junior and senior mechanics at the beginning of the next year.

   ii) The coaching of the trainees demands a lot of time, therefore the management decides to employ some extra junior and senior mechanics and aims at a long-run expected number of 30 trainees, 8 junior mechanics and 4 senior mechanics. Calculate for each of the three positions in the group of mechanics the average number of new employees that will have to be recruted every year.