Deel 2 van Wiskunde 2

Organisatorische informatie

Wat	Dag	Tijd	Zaal	Docent
College	Tue	5+6	Aud 6+15	Jacques Resing
	Thu	1+2	Aud 1+4	Jacques Resing
Werkcollege	Tue	7+8	Aud 6+15	Jacques Resing
Instructie	Thu	3+4	Aud 10	Jori Selen
			IPO 0.98	Rick Boere
			Pav B2	Fabio Cecchi
			Pav M23	Gianmarco Bet

Tussentoets op 15 december (7e+8e uur): Paviljoen Study hub 2

Stof tussentoets: Hoofdstuk 2 van boek Kulkarni + handout, secties 1 + 2.

Deel 2 van Wiskunde 2

Voorkennis

Calculus (2WBB0): differentieren en integreren

Wiskunde 1 (2DD40): discrete kansverdelingen, rekenen met matrices, stelsels van lineaire vergelijkingen

Statistiek (2DD70): continue kansverdelingen

Literatuur:
V.G. Kulkarni *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems*, Second edition, Springer Texts in Statistics

Voor actuele informatie, college materiaal, slides, instructie opgaven:

`www.win.tue.nl/~resing/2DD50/SOR/`

INLEIDING

Definitie Stochastisch Proces:

Verzameling van stochastische variabelen die het *gedrag in de tijd* beschrijven van een systeem dat *onderhevig is aan toeval*.

Tijdparameter:

- discreet: $\{X_n, n \geq 0\}$;
- continu: $\{X(t), t \geq 0\}$.

Toestandsruimte:

- discreet: $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- continu: $S = [0, \infty)$.

Voorbeelden

- Voorraadniveau van product in een systeem met periodic review.
  Tijd: discreet,   Toestandsruimte: discreet

- Temperatuur om 12.00 uur 's middags op opeenvolgende dagen.
  Tijd: discreet,   Toestandsruimte: continu

- Aantal klanten in een winkel gedurende een dag.
  Tijd: continu,   Toestandsruimte: discreet

- Verloop van de AEX-index over een dag.
  Tijd: continu,   Toestandsruimte: continu

Wij kijken voorlopig naar stochastische processen waarvan zowel tijdparameter als toestandsruimte *discreet* zijn. Bovendien nemen we aan dat de toestandsruimte *eindig* is.

- $\{X_n, n \geq 0\}$;
- $S = \{1, 2, \ldots, N\}$;

Vragen die we willen beantwoorden:

- Wat kan je zeggen over $X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}$, als je $X_0, X_1, \ldots, X_n$ kent? (korte-termijn gedrag)
- Welk deel van de tijd bevindt een stochastisch proces zich in een bepaalde toestand? (lange-termijn gedrag)
- Wat zijn de gemiddelde kosten per periode als er bij verblijf in de verschillende toestanden kosten gemoeid zijn? (bijv. voorraadkosten)

MARKOV KETENS

Definitie van Markov keten:

Een stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte S heet een *discrete-tijd Markov keten (DTMC)* als voor alle i en j in S geldt

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

In woorden:

Gegeven het *heden* X_n en het *verleden* $X_0, \ldots, X_{n-1}$ van het proces hangt de *toekomst* X_{n+1} alleen af van het heden en niet van het verleden.

De conditionele kansen

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

heten 1-*staps overgangskansen*.

In de meeste toepassingen geldt *voor alle* n:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{i,j},$$

i.e., de 1-staps overgangskansen zijn *tijdhomogeen* (ze hangen niet van n af).

In het vervolg kijken we alleen naar tijdhomogene Markov ketens!

De $N \times N$ matrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

heet de 1-*staps overgangsmatrix* en speelt een belangrijke rol bij de analyse van Markov ketens.

Merk op dat geldt:

$$p_{i,j} \geq 0, \quad \text{voor alle } i \text{ en } j; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1, \quad \text{voor alle } i. \tag{2}$$

Conclusie:

Alle elementen van P zijn niet-negatief en alle rijsommen zijn gelijk aan 1!

Een matrix P met de eigenschappen (1) en (2) heet een *stochastische matrix*.

Visualisatie van Markov keten:

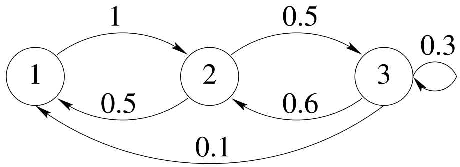
We visualiseren Markov ketens met behulp van een *transitiediagram*.

Transitiediagram:

Een transitiediagram is een *gerichte graaf* met N knopen.
De knopen in de graaf stellen de toestanden van de Markov keten weer.
We tekenen een pijl van knoop i naar knoop j wanneer $p_{i,j} > 0$.
Bij de pijl zetten we de waarde $p_{i.j}$.

Voorbeeld:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$



Voorbeelden van Markov ketens:

- Machineonderhoud (Example 2.2)
- Voorraadmodel (Example 2.4)
- Personeelsplanning (Example 2.6)
- Buffer in communicatienetwerk (Example 2.8)

Examples 2.3, 2.5 en 2.7 zelf doornemen.

Example 2.2: Machineonderhoud

Machine kan werken (1) of kapot zijn (0).

$$\text{Als machine vandaag werkt, dan morgen} \begin{cases} \text{met kans } 0.98 \text{ werkend,} \\ \text{met kans } 0.02 \text{ kapot.} \end{cases}$$

$$\text{Als machine vandaag kapot, dan morgen} \begin{cases} \text{met kans } 0.97 \text{ werkend,} \\ \text{met kans } 0.03 \text{ kapot.} \end{cases}$$

Laat X_n de toestand van de machine op dag n zijn.

Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.97 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

Kanttekeningen bij het model:

Wat geldt er voor de levensduur L en de reparatieduur R van een machine?
(levensduur = de tijd die de machine onafgebroken werkt)

Bewering: L en R zijn geometrisch verdeeld

$$\begin{aligned} P(L=k) &= (0.98)^{k-1} \cdot (0.02), \\ P(R=k) &= (0.03)^{k-1} \cdot (0.97). \end{aligned}$$

Merk op dat in het model de machine een *constante failure rate* heeft.
In de praktijk hebben machines echter vaak een *increasing failure rate*.
(hoe langer een machine onafgebroken werkt, des te groter de kans dat de machine stuk gaat).

Mogelijke uitbreidingen van het model:

- Model waarbij de toestand van een machine niet alleen maar *werkend of kapot* kan zijn, maar bijvoorbeeld *goed, redelijk, slecht of kapot*.

- Model waarbij je meerdere onafhankelijke machines hebt, allen met het gedrag zoals hiervoor beschreven (zie het boek voor de situatie met 2 machines).

Example 2.4: Voorraadmodel

Elke vrijdagmiddag inspectie van de voorraad.

Als voorraad kleiner dan $s = 2$, dan in weekend aangevuld tot $S = 5$.
(= (s, S) policy)

Vraag gedurende week n: D_n

Aanname: $\{D_n, n \geq 0\}$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld.

$$P(D_n = k) = d_k$$

Laat X_n de voorraad op maandagochtend in week n zijn.

Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een Markov keten met toestandsruimte $S = \{2, 3, 4, 5\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 1 - d_0 \\ d_1 & d_0 & 0 & 1 - d_0 - d_1 \\ d_2 & d_1 & d_0 & 1 - d_0 - d_1 - d_2 \\ d_3 & d_2 & d_1 & 1 - d_1 - d_2 - d_3 \end{pmatrix}.$$

Vragen:

- Wat gebeurt er als je niet naar voorraad op maandagochtend maar naar voorraad op vrijdagmiddag kijkt?
- Wat gebeurt er als de vraag in opeenvolgende periodes afhankelijk is?
- Wat gebeurt er als de vraag in opeenvolgende periodes niet identiek verdeeld is?

Example 2.6: Personeelsplanning

Bedrijf heeft 100 werknemers in 4 categorieën $\{1, 2, 3, 4\}$.

Promotiebeleid (iedere week):
$1 \to 2$ met kans 0.03
$2 \to 3$ met kans 0.01
$3 \to 4$ met kans 0.005

Vertrek werknemers (iedere week):
Categorie 1 met kans 0.02
Categorie 2 met kans 0.008
Categorie 3 met kans 0.02
Categorie 4 met kans 0.01

Vertrekkende werknemer wordt direct opgevolgd door één in categorie 1.

Markov model voor 1 specifieke werknemer:

Toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, \text{ weg}\}$

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.982 & 0.01 & 0 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.975 & 0.005 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Markov model voor werknemer met bepaald id-nummer:
(bij vertrek krijgt opvolger jouw nummer)

Toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0.008 & 0.982 & 0.01 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.975 & 0.005 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}.$$

TRANSIËNTE VERDELINGEN

Transiënte verdeling: $P(X_n = j),\ j \in S,$ voor zekere $n \geq 0$.

Limiet verdeling: $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j),\ j \in S$.

Transiënte verdelingen kunnen berekend worden m.b.v.

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{i\in S} P(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i\in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

De kansen $P(X_n = j \mid X_0 = i)$ heten n-*staps overgangskansen*.

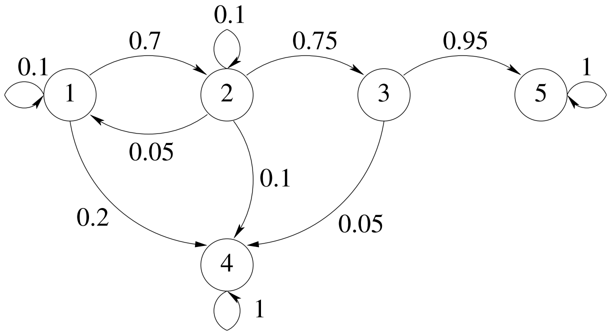
Vraag: Hoe berekenen we de n-staps overgangskansen?

Voorbeeld

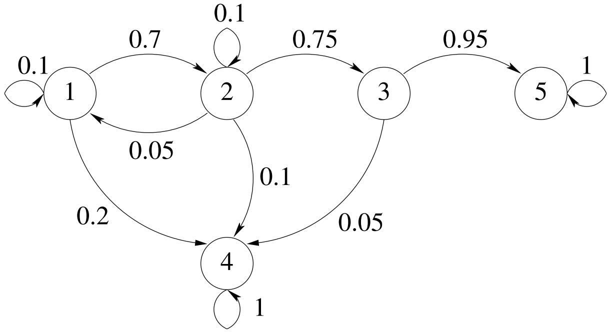
Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0.75 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transitiediagram



Gevraagd: $P(X_5 = 5\,|X_0 = 1)$?



Hoe kan ik in 5 stappen van 1 naar 5 gaan?

$1-1-1-2-3-5$ Kans: $(0.1)\cdot(0.1)\cdot(0.7)\cdot(0.75)\cdot(0.95)$
$1-2-1-2-3-5$ Kans: $(0.7)\cdot(0.05)\cdot(0.7)\cdot(0.75)\cdot(0.95)$
$1-1-2-2-3-5$ Kans: $(0.1)\cdot(0.7)\cdot(0.1)\cdot(0.75)\cdot(0.95)$
$1-2-2-2-3-5$ Kans: $(0.7)\cdot(0.1)\cdot(0.1)\cdot(0.75)\cdot(0.95)$
$1-1-2-3-5-5$ Kans: $(0.1)\cdot(0.7)\cdot(0.75)\cdot(0.95)\cdot(1)$
$1-2-2-3-5-5$ Kans: $(0.7)\cdot(0.1)\cdot(0.75)\cdot(0.95)\cdot(1)$
$1-2-3-5-5-5$ Kans: $(0.7)\cdot(0.75)\cdot(0.95)\cdot(1)\cdot(1)$

Er geldt dus

$$
\begin{aligned}
&P(X_5 = 5 \,|\, X_0 = 1) \\
&\quad = \ (0.1)(0.1)(0.7)(0.75)(0.95) + (0.1)(0.7)(0.1)(0.75)(0.95) \\
&\quad + (0.1)(0.7)(0.75)(0.95)(1) + (0.7)(0.05)(0.7)(0.75)(0.95) \\
&\quad + (0.7)(0.1)(0.1)(0.75)(0.95) + (0.7)(0.1)(0.75)(0.95)(1) \\
&\quad + (0.7)(0.75)(0.95)(1)(1) = 0.6309
\end{aligned}
$$

- Arbeidsintensieve methode;
  (X_{10} i.p.v. X_5, Markov ketens met grotere toestandsruimte)
- Foutgevoelige methode;
  (vergeet je geen paden?)

Kan dit niet anders?

Notatie:

$$p_{i,j}^{(n)} := P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

Dan geldt voor alle i en j:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(2)} &= P(X_2 = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_2 = j,\, X_1 = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = j \mid X_1 = k,\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = j \mid X_1 = k) \\ &= \sum_{k \in S} p_{i,k} \cdot p_{k,j}. \end{aligned}$$

Conclusie: Voor de 2-staps overgangsmatrix $P^{(2)}$ geldt

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

Evenzo kan je bewijzen dat voor de n-staps overgangsmatrix $P^{(n)}$ geldt

$$P^{(n)} = P^n$$

In woorden:

De n-staps overgangsmatrix $P^{(n)}$ is gelijk aan n-de macht van de matrix P.

Opmerking:

Het gebruik van Matlab kan erg handig zijn bij het berekenen van hogere machten van de matrix P.

In ons voorbeeld geldt

$$P^{(5)} = P^5 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0.75 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^5$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0010 & 0.0037 & 0.0095 & 0.3550 & 0.6309 \\ 0.0003 & 0.0010 & 0.0026 & 0.1722 & 0.8240 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0500 & 0.9500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en dus

$$P(X_5 = 5 \,|\, X_0 = 1) = p_{1,5}^{(5)} = 0.6309.$$

Merk op dat geldt:

$$P^{(n+m)} = P^{n+m} = P^n \cdot P^m = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$$

oftewel, voor alle i en j geldt

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} \cdot p_{k,j}^{(m)}.$$

Dit zijn de zogenaamde *Chapman-Kolmogorov* vergelijkingen.
(zie Stelling 2.3 in het boek)

Noteer met $a^{(n)}$ de transiënte verdeling van de Markov keten op tijdstip n, d.w.z.

$$a^{(n)} = [a_1^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)}] = [P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = N)]$$

dan volgt uit de al eerder getoonde formule

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

dat

$$a^{(n)} = a^{(0)} \cdot P^n$$

Conclusie:

Als je voor een Markov keten de beginverdeling $a^{(0)}$
en de overgangsmatrix P kent, kan je
voor elke n de transiënte verdeling $a^{(n)}$ uitrekenen.

In ons voorbeeld geldt, uitgaande van $a^{(0)} = [1, 0, 0, 0, 0]$, dat

$$
\begin{aligned}
a^{(1)} &= a^{(0)} \cdot P = [0.1, 0.7, 0, 0.2, 0], \\
a^{(2)} &= a^{(0)} \cdot P^2 = [0.045, 0.140, 0.525, 0.290, 0], \\
a^{(3)} &= a^{(0)} \cdot P^3 = [0.0115, 0.0455, 0.1050, 0.3393, 0.4987], \\
a^{(4)} &= a^{(0)} \cdot P^4 = [0.0034, 0.0126, 0.0341, 0.3514, 0.5985], \\
a^{(5)} &= a^{(0)} \cdot P^5 = [0.0010, 0.0037, 0.0095, 0.3550, 0.6308], \\
a^{(10)} &= a^{(0)} \cdot P^{10} = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.3564, 0.6435], \\
a^{(100)} &= a^{(0)} \cdot P^{100} = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.3564, 0.6435],
\end{aligned}
$$

Vermoedelijk zal wel gelden

$$
\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.3564, 0.6435]
$$

Hier komen we later op terug!

Example 2.8**: Buffer in communicatienetwerk:**

Switch in communicatienetwerk met N inkomende en 1 uitgaande lijn.

Tijd is ingedeeld in tijdsloten. In een tijdslot kan precies één pakket over iedere inkomende en de uitgaande lijn verstuurd worden.

In knooppunt bevindt zich een buffer ter grootte K (om te voorkomen dat datapakketten verloren gaan)

Aantal aankomende pakketten in tijdslot n: A_n

Aanname: $\{A_n, n \geq 0\}$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld.

$$P(A_n = k) = a_k$$

(Bijvoorbeeld $a_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, d.w.z. A_n is binomiaal verdeeld)

Laat X_n het aantal pakketten in de buffer aan het eind van tijdslot n zijn.

Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, \dots K\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{K-1} & b_K \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{K-1} & b_K \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{K-2} & b_{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & b_1 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$b_j = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} a_k.$$

Example 2.12 (vervolg van Example 2.8):

Y_n : aantal pakketten dat gedurende het n-de tijdslot verloren gaat.

Gevraagd: $E(Y_{n+1} \mid X_0 = 0)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Er geldt

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \max(0, A_{n+1} - K), & \text{als } X_n = 0, \\ \max(0, X_n - 1 + A_{n+1} - K), & \text{als } X_n > 0, \end{cases}$$

en dus

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} \mid X_0 = 0) &= p_{0,0}^{(n)} E(\max(0, A_{n+1} - K) \\ &+ \sum_{k=1}^{K} p_{0,k}^{(n)} E(\max(0, k - 1 + A_{n+1} - K)) \end{aligned}$$

Met $a_r = P(A_{n+1} = r)$ geeft dit

$$E(Y_{n+1} \mid X_0 = 0) =$$
$$p_{0,0}^{(n)} \cdot \sum_{r=K}^{\infty} a_r \cdot (r - K) + \sum_{k=1}^{K} p_{0,k}^{(n)} \cdot \sum_{r=K+1-k}^{\infty} a_r \cdot (r - K - 1 + k)$$

(zie voor verdere uitwerking van dit voorbeeld Example 2.12 in het boek)

TOTALE TIJD IN TOESTAND (= OCCUPANCY TIME)

We willen *totale verwachte tijd in bepaalde toestand* over een tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$ weten.
Aangezien de tijd tussen 2 transities gelijk aan 1 tijdseenheid is, komt dit overeen met het *verwachte aantal keren in die toestand* over de tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Notatie:

$N_j(n)$: Aantal keren in toestand j over tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$.

en
$m_{i,j}(n) = E(N_j(n) \mid X_0 = i)$.

Bewering:

$$m_{i,j}(n) = \sum_{r=0}^{n} P(X_r = j \mid X_0 = i) = \sum_{r=0}^{n} p_{i,j}^{(r)}$$

en dus in matrixnotatie

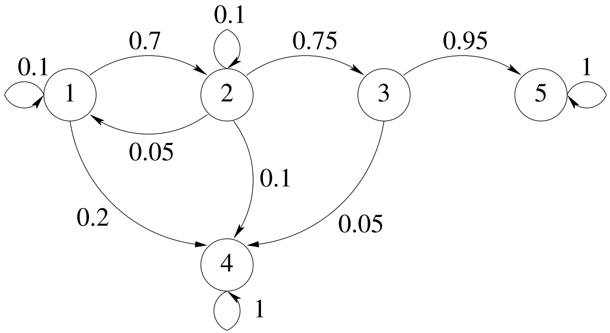
$$M(n) = \sum_{r=0}^{n} P^{(r)} = \sum_{r=0}^{n} P^r.$$

Voorbeeld

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0.75 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transitiediagram



$$M(5) = I + P + \cdots + P^5 = \begin{pmatrix} 1.161 & 0.902 & 0.674 & 1.535 & 1.728 \\ 0.064 & 1.161 & 0.870 & 0.769 & 3.136 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0.250 & 4.750 \\ 0 & 0 & 0 & 6.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.000 \end{pmatrix}$$

$$M(10) = I + P + \cdots + P^{10} = \begin{pmatrix} 1.161 & 0.903 & 0.678 & 3.317 & 4.941 \\ 0.065 & 1.161 & 0.871 & 1.631 & 7.272 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0.500 & 9.500 \\ 0 & 0 & 0 & 11.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.000 \end{pmatrix}$$

$$M(20) = I + P + \cdots + P^{20} = \begin{pmatrix} 1.161 & 0.903 & 0.678 & 6.882 & 11.376 \\ 0.065 & 1.161 & 0.871 & 3.357 & 15.546 \\ 0 & 0 & 1.000 & 1.000 & 19.000 \\ 0 & 0 & 0 & 21.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.000 \end{pmatrix}$$

Merk op dat er, voor grote n, verschil is tussen datgene wat er gebeurt met enerzijds:

$$m_{i,j}(n), \text{ voor } j = 1, 2, 3,$$

en anderzijds

$$m_{i,j}(n), \text{ voor } j = 4, 5.$$

Wat is het verschil? Hoe zou dit komen?

Hier komen we later op terug!