MARKOV KETENS

Definitie van Markov keten:

Een stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte S heet een *discrete-tijd Markov keten (DTMC)* als voor alle i en j in S geldt

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

In woorden:

Gegeven het *heden* X_n en het *verleden* $X_0, \ldots, X_{n-1}$ van het proces hangt de *toekomst* X_{n+1} alleen af van het heden en niet van het verleden.

De conditionele kansen

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

heten *1-staps overgangskansen*.

In de meeste toepassingen geldt *voor alle* n:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{i,j},$$

i.e., de 1-staps overgangskansen zijn *tijdhomogeen* (ze hangen niet van n af).

In het vervolg kijken we alleen naar tijdhomogene Markov ketens!

De $N \times N$ matrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

heet de *1-staps overgangsmatrix* en speelt een belangrijke rol bij de analyse van Markov ketens.

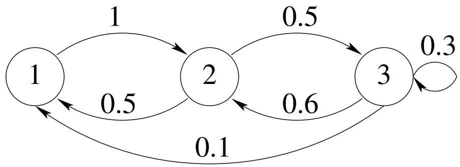
Visualisatie van Markov keten:

We visualiseren Markov ketens met behulp van een *transitiediagram*.

Transitiediagram:
Een transitiediagram is een *gerichte graaf* met N knopen.
De knopen in de graaf stellen de toestanden van de Markov keten weer.
We tekenen een pijl van knoop i naar knoop j wanneer $p_{i,j} > 0$.
Bij de pijl zetten we de waarde $p_{i.j}$.

Voorbeeld:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$



TRANSIËNTE VERDELINGEN

Transiënte verdeling: $P(X_n = j),\ j \in S,$ voor zekere $n \geq 0$.

Limiet verdeling: $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j),\ j \in S$.

Transiënte verdelingen kunnen berekend worden m.b.v.

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

De kansen $P(X_n = j \mid X_0 = i)$ heten n*-staps overgangskansen*.

Vraag: Hoe berekenen we de n-staps overgangskansen?

Notatie:

$$p_{i,j}^{(n)} := P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

Dan geldt voor alle i en j:

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(2)} &= P(X_2 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_2 = j,\ X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = j \mid X_1 = k,\ X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = j \mid X_1 = k) \\
&= \sum_{k \in S} p_{i,k} \cdot p_{k,j}.
\end{aligned}$$

Conclusie: Voor de 2-staps overgangsmatrix $P^{(2)}$ geldt

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

Evenzo kan je bewijzen dat voor de n-staps overgangsmatrix $P^{(n)}$ geldt

$$P^{(n)} = P^n$$

In woorden:

De n-staps overgangsmatrix $P^{(n)}$ is gelijk aan n-de macht van de matrix P.

Opmerking:

Het gebruik van Matlab kan erg handig zijn bij het berekenen van hogere machten van de matrix P.

Noteer met $a^{(n)}$ de transiënte verdeling van de Markov keten op tijdstip n, d.w.z.

$$a^{(n)} = [a_1^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)}] = [P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = N)]$$

dan volgt uit de al eerder getoonde formule

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

dat

$$a^{(n)} = a^{(0)} \cdot P^n$$

Conclusie:

Als je voor een Markov keten de beginverdeling $a^{(0)}$
en de overgangsmatrix P kent, kan je
voor elke n de transiënte verdeling $a^{(n)}$ uitrekenen.

LIMIETGEDRAG VAN MARKOV KETENS

Tot nu toe hebben we gekeken naar het *transiënte gedrag* van Markov ketens

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= [a_1^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)}] \\ &= [P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = N)] \end{aligned}$$

voor zekere eindige waarde van n.

In het vervolg zullen we kijken naar het *limietgedrag* van Markov ketens

$$\begin{aligned} \pi &= [\pi_1, \ldots, \pi_N] \\ &= [\lim_{n\to\infty} a_1^{(n)}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_N^{(n)}] \\ &= [\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1), \ldots, \lim_{n\to\infty} P(X_n = N)] \end{aligned}$$

De vector π heet de *limietverdeling* van de Markov keten.

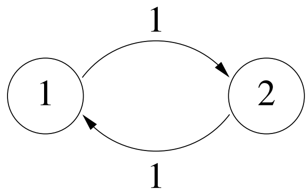
Vragen die we willen beantwoorden zijn:

- Bestaat de limietverdeling altijd?
- Als de limietverdeling bestaat, is hij dan uniek?
  (Hangt limietverdeling af van beginverdeling van de Markov keten?
  Of krijg je, onafhankelijk van beginverdeling, dezelfde limietverdeling?)
- Hoe bereken je de limietverdeling als hij bestaat?

We zullen eerst naar een drietal voorbeelden kijken.

Voorbeeld 1:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



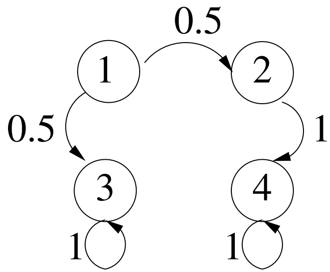
Stel $P(X_0 = 1) = 1$. Dan geldt

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= [1, 0], \\ a^{(1)} &= [0, 1], \\ a^{(2)} &= [1, 0], \\ a^{(3)} &= [0, 1], \\ \vdots &= \vdots \\ a^{(2n)} &= [1, 0], \\ a^{(2n+1)} &= [0, 1]. \end{aligned}$$

Conclusie: Limietverdeling bestaat niet!

Voorbeeld 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Stel $P(X_0 = 1) = 1$

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= [1, 0, 0, 0] \\ a^{(1)} &= [0, 0.5, 0.5, 0] \\ a^{(2)} &= [0, 0, 0.5, 0.5] \\ &\vdots \\ a^{(n)} &= [0, 0, 0.5, 0.5] \end{aligned}$$

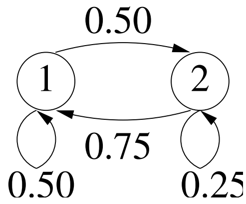
Stel $P(X_0 = 2) = 1$

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= [0, 1, 0, 0] \\ a^{(1)} &= [0, 0, 0, 1] \\ a^{(2)} &= [0, 0, 0, 1] \\ &\vdots \\ a^{(n)} &= [0, 0, 0, 1] \end{aligned}$$

Conclusie: Limietverdeling hangt af van beginverdeling!

Voorbeeld 3:

$$P = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$



Stel $P(X_0 = 1) = 1$	Stel $P(X_0 = 2) = 1$
$a^{(0)} = [1.000, 0.000]$	$a^{(0)} = [0.000, 1.000]$
$a^{(1)} = [0.500, 0.500]$	$a^{(1)} = [0.750, 0.250]$
$a^{(2)} = [0.625, 0.375]$	$a^{(2)} = [0.563, 0.437]$
$a^{(3)} = [0.594, 0.406]$	$a^{(3)} = [0.610, 0.390]$
$a^{(4)} = [0.602, 0.398]$	$a^{(4)} = [0.598, 0.402]$
$a^{(5)} = [0.600, 0.400]$	$a^{(5)} = [0.600, 0.400]$
$\vdots$	$\vdots$

Conclusie: Unieke limietverdeling!

Voor de Markov keten uit Voorbeeld 1 hebben we gezien dat er GEEN *limietverdeling* bestaat. WEL bestaan er voor dit voorbeeld een *stationaire verdeling* en een zogenaamde *occupatie verdeling*.

Definitie:

Een verdeling $\pi^* = [\pi_1^*, \ldots, \pi_N^*]$ heet een *stationaire verdeling* als geldt

$$\begin{array}{ll} P(X_0 = i) = \pi_i^*, & \text{voor } i = 1, \ldots, N \\ \Downarrow & \\ P(X_n = i) = \pi_i^*, & \text{voor } i = 1, \ldots, N \text{ en alle } n \geq 0 \end{array}$$

Ga voor Voorbeeld 1 na dat $\pi^* = [1/2, 1/2]$ een stationaire verdeling is.

Definitie:

Laat $N_j(n)$ het aantal bezoeken van een Markov keten aan toestand j in de tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$ zijn en

$$\hat{\pi}_j = \lim_{n \to \infty} \frac{E(N_j(n))}{n+1},$$

de lange-termijn fractie van de tijd dat de Markov keten zich in toestand j bevindt. De verdeling $\hat{\pi} = [\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_N]$ noemen we de *occupatie verdeling* van de Markov keten.

Ga voor Voorbeeld 1 na dat, onafhankelijk van de beginverdeling van de Markov keten, $\hat{\pi} = [1/2, 1/2]$ de occupatie verdeling is.

Hoe *berekenen* we nu limietverdelingen, stationaire verdelingen en occupatieverdelingen van Markov ketens?

Deze vraag wordt gedeeltelijk beantwoord door de volgende stelling (zie de Stellingen 2.5, 2.6 en 2.7 in het boek).

Stelling:

Voor zowel een limietverdeling π, een stationaire verdeling π^* en een occupatie verdeling $\hat{\pi}$ geldt dat, als ze bestaan, ze een oplossing zijn van het stelsel vergelijkingen $\pi = \pi \cdot P$ (respectievelijk $\pi^* = \pi^* \cdot P$ en $\hat{\pi} = \hat{\pi} \cdot P$) waarvoor bovendien geldt dat $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$ (respectievelijk $\sum_{i=1}^{N} \pi_i^* = 1$ en $\sum_{i=1}^{N} \hat{\pi}_i = 1$).

Waarom geldt dat er in Voorbeeld 1 GEEN limietverdeling bestaat, er in Voorbeeld 2 MEERDERE limietverdelingen bestaan en er in Voorbeeld 3 een UNIEKE limietverdeling bestaat?

Om een antwoord op deze vraag te kunnen geven, zullen we eerst twee *structuureigenschappen* van Markov ketens formuleren.

Definitie 2.3:
Een Markov keten heet *irreducibel* als er voor alle $i \in S$ en alle $j \in S$ een $k > 0$ bestaat zodanig dat $p_{i,j}^{(k)} > 0$. Als een Markov keten niet aan deze eigenschap voldoet, noemen we hem *reducibel*.

Merk op dat een Markov keten irreducibel is dan en slechts dan als je van iedere toestand i naar iedere andere toestand j kunt komen, in één of meerdere stappen.

Vraag: Zijn de Markov ketens in Voorbeeld 1, 2 en 3 reducibel of irreducibel?

Definitie 2.4:
Laat X_n een irreducibele Markov keten zijn en laat d het grootste gehele getal zijn zodanig dat voor alle $i \in S$ geldt

$$p_{i,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow \; n \text{ is een veelvoud van } d.$$

De Markov keten heet *periodiek* met periode d als $d > 1$ en *aperiodiek* als $d = 1$.

Vraag: Zijn de Markov ketens in Voorbeeld 1 en 3 periodiek of aperiodiek?

We zullen nu de hoofdstelling over het limietgedrag van Markov ketens formuleren.

Stelling:

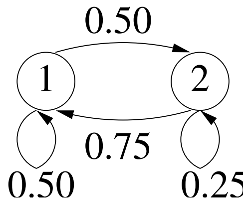
Een irreducibele, aperiodieke Markov keten met eindige toestandsruimte S heeft een unieke limietverdeling π, een unieke stationaire verdeling π^* en een unieke occupatie verdeling $\hat{\pi}$. Alle verdelingen zijn gelijk ($\pi = \pi^* = \hat{\pi}$) en ze zijn de unieke oplossing van het stelsel $\pi = \pi P$ waarvoor geldt $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$.

Voor een irreducibele, periodieke Markov keten geldt bovenstaand resultaat nog wel voor de stationaire verdeling en de occupatie verdeling. De limietverdeling bestaat in dit geval echter niet.

Het limietgedrag van reducibele Markov ketens wordt besproken in sectie 1 van de handout.

Vervolg Voorbeeld 3:

$$P = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$



Dit is een voorbeeld van een irreducibele, aperiodieke Markov keten. Het stelsel vergelijkingen $\pi = \pi P$ is in dit geval

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.50\pi_1 + 0.75\pi_2, \\ \pi_2 &= 0.50\pi_1 + 0.25\pi_2. \end{aligned}$$

Beide vergelijkingen reduceren tot de vergelijking $0.50\pi_1 = 0.75\pi_2$. Samen met de normalisatievergelijking

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

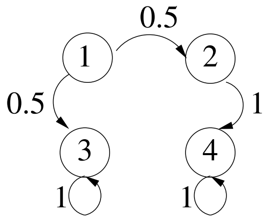
geeft dit de unieke oplossing $\pi_1 = 0.60, \pi_2 = 0.40$.

LIMIETGEDRAG VAN REDUCIBELE MARKOV KETEN

In het voorgaande hebben we gezien hoe we de limietverdeling van een *irreducibele, aperiodieke* Markov keten kunnen berekenen. Maar hoe berekenen we nu de limietverdeling van een *reducibele* Markov keten?

Vervolg voorbeeld 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Het stelsel $\pi = \pi P$ geeft nu

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0.5\pi_1, \quad \pi_3 = 0.5\pi_1 + \pi_3, \quad \pi_4 = \pi_2 + \pi_4.$$

De normalisatievergelijking is $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$.

We concluderen dat *iedere* verdeling

$$\pi = [0, 0, \alpha, 1-\alpha], \quad \text{met } 0 \leq \alpha \leq 1,$$

een genormaliseerde oplossing is van het stelsel $\pi = \pi P$.
Maar hoe weten we nu hoe we, afhankelijk van de beginverdeling, de waarde van α moeten kiezen?

Waarom geldt als $P(X_0 = 1)$ dat $\pi = [0, 0, 1/2, 1/2]$ en dus dat we $\alpha = 1/2$ moeten kiezen?

En waarom geldt als $P(X_0 = 2)$ dat $\pi = [0, 0, 0, 1]$ en dus dat we $\alpha = 0$ moeten kiezen?

En hoe zit het voor een willekeurige beginverdeling $a^{(0)}$?

Om antwoord op deze vragen te geven, zullen we een stappenplan formuleren voor het vinden van de limietverdeling van een reducibele Markov keten.

STAPPENPLAN VOOR HET VINDEN VAN LIMIETVERDELING VAN REDUCIBELE MARKOV KETEN.

Stap 1:

Verdeel de toestandsruimte S van de Markov keten in een aantal eindklassen $E_1, \ldots, E_m$ en een verzameling doorgangstoestanden C zodanig dat $S = C \cup E_1 \cup \cdots \cup E_m$.

Een *eindklasse* is een verzameling van verbonden toestanden zodanig dat als de Markov keten in deze verzameling toestanden terecht komt, hij daar nooit meer uit kan komen.

Met een *verzameling van verbonden toestanden* bedoelen we dat je van iedere toestand in de verzameling in één of meer stappen naar iedere andere toestand kan komen.

Toestanden die niet in een eindklasse zitten noemen we *doorgangstoestanden*.

Stap 2:

Bepaal voor iedere toestand $i \in S$ en voor iedere eindklasse E_j, $j = 1, \ldots, m$, de kans q_{i,E_j} dat de Markov keten, bij start in toestand i, in de eindklasse E_j belandt.

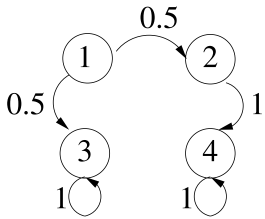
Stap 3:

Bepaal voor iedere eindklasse de limietverdeling (als die bestaat) van de Markov keten, gegeven dat je in deze eindklasse terecht bent gekomen. Merk op dat binnen een eindklasse een Markov keten zich gedraagt als een irreducibele Markov keten. We weten dus hoe we in zo'n geval de limietverdeling kunnen uitrekenen.

De limietverdeling van een reducibele Markov keten volgt
uit een combinatie van de voorgaande drie stappen!

Vervolg voorbeeld 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Stap 1: $E_1 = \{3\}, E_2 = \{4\}, C = \{1, 2\}$.

Stap 2:

$$q_{1,E_1} = q_{1,E_2} = 1/2,\ q_{2,E_1} = q_{3,E_2} = q_{4,E_1} = 0,\ q_{2,E_2} = q_{3,E_1} = q_{4,E_2} = 1.$$

Stap 3: In eindklasse E_1 geldt $\pi_3 = 1$, in eindklasse E_2 geldt $\pi_4 = 1$.

Combinatie van stappen 1, 2 en 3 geeft de limietverdeling:

Als $P(X_0 = 1)$ dan $\pi = [0, 0, 1/2, 1/2]$, als $P(X_0 = 2)$ dan $\pi = [0, 0, 0, 1]$

Voorbeeld 4:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 3/5 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Stap 1: Teken plaatje en bepaal eindklassen + doorgangstoestanden.

Stap 2: Stel stelsel vergelijkingen op voor de kansen q_{i,E_j}.

Stap 3: Bepaal de limietverdeling voor de verschillende eindklassen.

Combineer de stappen 1,2 en 3.