COHORTE MODELLEN

Stel we hebben een groep personen, waarvan het gedrag van ieder persoon afzonderlijk beschreven wordt door een Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ en overgangsmatrix P.

Toestand 0 stelt de situatie voor dat de persoon het systeem verlaten heeft.

Q is het deel van de overgangsmatrix dat correspondeert met overgangen van de toestanden $\{1, 2, \ldots, N\}$ naar de toestanden $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Merk op dat Q een *sub-stochastische matrix* is, d.w.z. een matrix waarvoor geldt dat $q_{i,j} \geq 0$ voor alle i en j en $\sum_{j=1}^{N} q_{i,j} \leq 1$ voor alle i.

Korte-termijn gedrag

Notatie:

- $r_i^{(n)}$: Het verwachte aantal *nieuwe* personen, *recruten* genaamd, die van buiten op tijdstp n de groep binnenkomen in toestand i.
- $s_i^{(n)}$: Het verwachte totaal aantal personen op tijdstip n in de groep in toestand i.

Als we met $r^{(n)}$ en $s^{(n)}$ de liggende vectoren

$$r^{(n)} = [r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \ldots, r_N^{(n)}], \qquad s^{(n)} = [s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \ldots, s_N^{(n)}],$$

noteren, dan hebben we

$$s^{(n)} = r^{(n)} + s^{(n-1)} \cdot Q$$

Conclusie: Als we de beginvector $s^{(0)}$ en de vectoren van aantallen recruten op de verschillende tijdstippen $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \ldots$ kennen, kunnen we de vectoren $s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, \ldots$ uitrekenen.

Voorbeeld: Personeelsplanning model (model voor 1 werknemer)
Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Neem verder aan dat $s^{(0)} = [10, 10, 10, 10]$ en $r^{(n)} = [10, 0, 0, 0]$ voor alle n.

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= [10, 0, 0, 0] + [10, 10, 10, 10] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= [16, 9, 9.5, 11]. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s^{(2)} &= [10,0,0,0] + [16,9,9.5,11] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\
&= [19.6, 9.5, 8.9, 11.8].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s^{(3)} &= [10,0,0,0] + [19.6,9.5,8.9,11.8] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\
&= [21.76, 10.57, 8.61, 12.40].
\end{aligned}
$$

Enzovoorts.

Lange-termijn gedrag

In het geval dat het verwachte aantal recruten *tijdhomogeen* is, d.w.z. $r^{(n)} = r$ voor alle n, dan kunnen we ook het verwachte aantal personen op den lange duur in de verschillende toestanden uitrekenen.

In dit geval geldt voor $s = \lim_{n\to\infty} s^{(n)}$ dat

$$s = r + s \cdot Q.$$

Dit is een stelsel vergelijkingen. Als we r en Q weten kunnen we s oplossen. Andersom geldt ook dat als we s en Q weten we met behulp van dit stelsel de r kunnen vinden.

Vervolg voorbeeld:

In het voorbeeld geldt $r^{(n)} = r = [10, 0, 0, 0]$ voor alle n en

$$Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft ($s = r + s \cdot Q$):

$$\begin{aligned} s_1 &= 10 + 0.6 s_1, \\ s_2 &= 0.2 s_1 + 0.7 s_2, \\ s_3 &= 0.25 s_2 + 0.7 s_3, \\ s_4 &= 0.2 s_3 + 0.9 s_4. \end{aligned}$$

Dit stelsel heeft als oplossing:

$$s_1 = 25,\ s_2 = 50/3 \approx 16.67,\ s_3 = 125/9 \approx 13.89,\ s_4 = 250/9 \approx 27,78.$$

Uit de vergelijking

$$s = r + s \cdot Q$$

volgt dat (met I de identiteitsmatrix)

$$s \cdot (I - Q) = r.$$

Links en rechts met $(I - Q)^{-1}$ vermengvuldigen geeft

$$s = r \cdot (I - Q)^{-1}.$$

Deze formule is handig als we de oplossing s bijvoorbeeld met behulp van Matlab willen uitrekenen.

Opmerking: Dat de inverse van de matrix $I - Q$ bestaat volgt uit het feit dat de matrix Q sub-stochastisch is.

Vervolg voorbeeld:

In het voorbeeld geldt $r^{(n)} = r = [10, 0, 0, 0]$ voor alle n en

$$\begin{aligned} I - Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} s = \lim_{n\to\infty} s^{(n)} &= [10, 0, 0, 0] \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= [25, 16.67, 13.89, 27, 78]. \end{aligned}$$

MARKOV PROCESSEN
Continue-tijd Markov ketens (CTMCs)

In de voorafgaande colleges hebben we uitgebreid gekeken naar discrete-tijd Markov ketens (DTMCs).

Definitie van discrete-tijd Markov keten:

Een stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte S heet een *discrete-tijd Markov keten (DTMC)* als voor alle i en j in S en voor alle n geldt

$$P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i).$$

"Gegeven het *heden* X_n en het *verleden* $X_0, \ldots, X_{n-1}$ van het proces hangt de *toekomst* X_{n+1} alleen af van het heden en niet van het verleden."

In het vervolg gaan we stochastische processen in continue tijd bestuderen die een zelfde soort eigenschap hebben.

Eigenschappen van de exponentiële verdeling

Bij het bestuderen van continue-tijd Markov ketens zal de *exponentiële verdeling* een belangrijke rol spelen.

Een stochastische variabele T is exponentiëel verdeeld met parameter λ (Notatie: $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$) als geldt

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{als } t > 0. \end{cases}$$

De bijbehorende *kansdichtheid* wordt gegeven door

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{als } t > 0. \end{cases}$$

Interpretatie kansdichtheid: voor klein intervalletje ter lengte dt geldt

$$P(t \leq T \leq t + dt) \approx f(t)dt.$$

Verwachting en variantie

Als T exponentiëel verdeeld is met parameter λ dan geldt

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_{0}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Analoog kan je laten zien

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \int_{0}^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2},$$

en dus

$$\mathrm{Var}(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Geheugenloosheidseigenschap

Als de stochastische variabele T exponentiëel verdeeld is dan geldt voor alle $s, t > 0$:

$$P(T > s + t \,|\, T > s) = P(T > t).$$

In woorden:

Als ik weet dat de levensduur van een machine minstens s is, dan is de kans dat de resterende levensduur groter dan t gelijk aan de kans dat de levensduur van een nieuwe machine groter dan t.

Kortom, de huidige leeftijd van de machine heeft geen invloed op de resterende levensduur van de machine. Vandaar dat we dit de *geheugenloosheidseigenschap* van de exponentiële verdeling noemen.

Constante failure-rate

Als de stochastische variabele T exponentiëel verdeeld is met parameter λ dan geldt voor dt klein en voor alle t

$$\begin{aligned} P(T \leq t + dt \,|\, T > t) &= \frac{P(t < T \leq t + dt)}{P(T > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+dt)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= 1 - e^{-\lambda dt} \\ &\approx \lambda dt. \end{aligned}$$

De laatste stap volgt uit de Taylorreeksontwikkeling voor e^x:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Conclusie: Als een machine een exponentiële levensduur heeft, dan heeft hij een *constante failure rate* (vgl. met eigenschap van geometrische verdeling).

Minimum van exponentiële stochastische variabelen

Stel $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1), T_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2), \ldots, T_k \sim \text{Exp}(\lambda_k)$ met $T_1, T_2, \ldots, T_k$ onafhankelijk en definieer $T = \text{Min}(T_1, T_2, \ldots, T_k)$.
Dan geldt:

1. $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ met $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$,
2. $P(T = T_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$,
3. $P(T > t \,|\, T = T_i) = e^{-\lambda t}$.

In woorden:

1. het minimum van exponentiëel verdeelde stochastische variabelen is weer exponentiëel verdeeld,
2. de kans dat het minimum wordt aangenomen door T_i is evenredig met de parameter λ_i,
3. de tijd tot het minimum van de k gebeurtenissen optreedt, hangt niet af van welke gebeurtenis als eerste optreedt.

Definitie van continue-tijd Markov keten:

Een stochastisch proces $\{X(t), t \geq 0\}$ met toestandsruimte S heet een *continue-tijd Markov keten (CTMC)* als voor alle i en j in S en voor alle tijden $s, t \geq 0$ geldt

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u), 0 \leq u < s) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i).$$

In woorden:

"Gegeven het *heden* $X(s)$ en het *verleden* $X(u), 0 \leq u < s$ van het proces hangt de *toekomst* $X(s+t)$ alleen af van het heden en niet van het verleden."

Het als bij discrete-tijd Markov ketens beperken we ons weer tot het bestuderen van *tijdhomogene* Markov ketens, d.w.z. dat voor alle $s, t \geq 0$ geldt

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i) = p_{i,j}(t).$$

De kansen $p_{i,j}(t)$ noemen we weer *overgangskansen* en de $N \times N$ matrix

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) & \dots & p_{1,N}(t) \\ p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) & \dots & p_{2,N}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N,1}(t) & p_{N,2}(t) & \dots & p_{N,N}(t) \end{pmatrix}$$

heet weer de *overgangsmatrix*.

Hoe beschrijven we een continue-tijd Markov keten?

In het discrete-tijd geval beschreven we een Markov keten door de *1-staps overgangsmatrix* te geven. De n-staps overgangsmatrix kan hieruit afgeleid worden ($P^{(n)} = P^n$).

Een analoge beschrijving in het continue-tijd geval is helaas niet mogelijk: er is geen "kleinste tijdstap"!

Daarom beschrijven we een CTMC op een andere manier. We maken hierbij dankbaar gebruik van de *geheugenloosheidseigenschap* van de exponentiële verdeling.

Uit het feit dat voor een Markov proces geldt dat de toekomst, gegeven het heden en het verleden, onafhankelijk is van het verleden volgt namelijk direct dat de *verblijftijd* van het proces in een toestand geheugenloos, en dus exponentiëel verdeeld moet zijn.

Beschrijving continue-tijd Markov keten

Een continue-tijd Markov keten is een stochastisch proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, \ldots, N\}$ waarvoor het volgende geldt:

- het proces verblijft een exponentiële tijd, zeg met parameter r_i in toestand i,
- daarna springt het proces, onafhankelijk van het verleden van het proces, met kans $p_{i,j}$ naar toestand j,
- vervolgens verblijft het proces een exponentiële tijd, zeg met parameter r_j in toestand j,
- daarna springt het proces, onafhankelijk van het verleden van het proces, met kans $p_{j,k}$ naar toestand k,
- enzovoorts .....

Visualisatie continue-tijd Markov keten

Net als bij een discrete-tijd Markov keten visualiseren we een continue-tijd Markov keten met behulp van een gerichte graaf.

Als we van toestand i naar toestand j kunnen springen zetten we van knoop i naar knoop j een pijl met daar boven de grootheid

$$r_{i,j} = r_i p_{i,j}.$$

De grootheid $r_{i,j}$ is de *overgangsintensiteit* van toestand i naar toestand j.

Interpretatie van overgangsintensiteit:

Als we naar een klein intervalletje ter lengte dt kijken, dan is de kans dat het proces in dat intervalletje van i naar j springt gelijk aan $r_{i,j}dt$.
(als het proces in toestand i zit wil het $r_{i,j}$ keer per tijdseenheid van toestand i naar toestand j springen)

De rol die de 1-staps overgangsmatrix P had bij een DTMC wordt nu dus overgenomen door de intensiteitmatrix R

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,N} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{N,1} & r_{N,2} & \dots & r_{N,N} \end{pmatrix}$$

Wanneer je van een CTMC de beginverdeling en de intensiteitmatrix R hebt beschreven, heb je het stochastisch gedrag van het proces in zijn geheel beschreven.

Waarschuwing:

In veel andere boeken wordt niet gewerkt met de intensiteitmatrix R maar met de generatormatrix Q. Voor $i \neq j$ geldt $q_{i,j} = r_{i,j}$, maar voor $i = j$ geldt $q_{i,i} = -r_i$ terwijl $r_{i,i} = 0$.

Example 4.3

Machine is afwisselend in bedrijf en in reparatie wegens defect. Bedrijfsduur B is stochastisch en $B \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Reparatieduur R is eveneens stochastisch, $R \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ en B en R zijn onafhankelijk.

Stel toestand 0 = in reparatie wegens defect, toestand 1 = in bedrijf,

$X(t)$ = toestand op tijdstip t, dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{0, 1\}$ een *continue-tijd Markov keten (CTMC)*.

Er geldt op tijdstip t: (rest)tijd B in toestand 1 $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$, dus $r_1 = \mu$ en (rest)tijd R in toestand 0 $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dus $r_0 = \lambda$.
Verder $p_{1,0} = p_{0,1} = 1$, zodat $r_{0,1} = r_0 * p_{0,1} = \lambda$ en $r_{1,0} = r_1 * p_{1,0} = \mu$, waaruit de intensiteitmatrix R volgt.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Example 4.4

Twee onafhankelijke machines 1 en 2. Bedrijfsduur machine i $(i = 1, 2)$ is $B_i \sim \text{Exp}(\mu)$, reparatieduur wegens defect machine i is $R_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. Voor elke machine is een reparateur beschikbaar.

$X(t)$ = toestand op tijdstip t = aantal machines op tijd t in bedrijf, dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2\}$ een *continue-tijd Markov keten (CTMC)*.

Toestand 2: (rest)tijd in 2 = $\min(\text{(rest)}B_1, \text{(rest)}B_2) \sim \text{Exp}(2\mu)$, dus $r_2 = 2\mu$. Als een machine defect raakt, dan volgt overgang naar toestand 1 met kans $p_{2,1} = 1$ zodat $r_{2,1} = r_2 * p_{2,1} = 2\mu$.

Example 4.4 (vervolg)

Toestand 1: (rest)tijd in 1 = $\min($(rest)B_1,(rest)$R_2)$ of $\min($(rest)R_1,(rest)$B_2) \sim$ $\mathrm{Exp}(\lambda+\mu)$, dus $r_1 = \lambda + \mu$.

Werkende machine defect voordat andere gerepareerd is: overgang naar toestand 0, kans $p_{1,0} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ zodat $r_{1,0} = r_1 * p_{1,0} = \mu$.

Reparatie van defecte machine klaar voor andere defect raakt: overgang naar toestand 2, kans $p_{1,2} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ zodat $r_{1,2} = r_1 * p_{1,2} = \lambda$.

Toestand 0: (rest)tijd in 0 = $\min($(rest)R_1,(rest)$R_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$, dus $r_0 = 2\lambda$. Als de reparatie van een machine klaar is, dan volgt overgang naar toestand 1 met kans $p_{0,1} = 1$ zodat $r_{0,1} = r_0 * p_{0,1} = 2\lambda$.

Intensiteitmatrix R bij $S = \{0, 1, 2\}$ (in die volgorde) $R = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & o \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & 2\mu & 0 \end{pmatrix}$

Example 4.5

Machine werkplaats met vier onafhankelijke machines 1, 2, 3 en 4. Bedrijfsduur machine i ($i = 1, 2, 3, 4$) is $B_i \sim$ Exp(μ), reparatieduur wegens defect machine i is $R_i \sim$ Exp(λ). Er zijn twee reparateurs beschikbaar.

$X(t)$ = toestand op tijdstip t = aantal machines op tijd t in bedrijf, dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ een *continue-tijd Markov keten (CTMC)*.

De intensiteitmatrix R bij deze $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ wordt

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Continue-tijd Markov ketens waarbij je, voor alle $i \in S$, vanuit toestand i alleen maar naar de naburige toestanden $i-1$ en $i+1$ kunt springen heten *geboorte-sterfte processen*.

Notatie:
λ_i: de intensiteit waarmee je van toestand i naar toestand $i+1$ springt.
μ_i: de intensiteit waarmee je van toestand i naar toestand $i-1$ springt.

De intensiteiten matrix R van een eindig geboorte-sterfte proces met toestandsruimte $\{0, 1, \ldots, K\}$ ziet er als volgt uit:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_1 & 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_{K-1} & 0 & \lambda_{K-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \mu_K & 0 \end{pmatrix}.$$

VOORBEELD VAN GEBOORTE-STERFTE PROCESSEN

Werkplaats met N machines en $M \leq N$ reparateurs.

Levensduren van machines: $Exp(\mu)$

Reparatieduren van machines: $Exp(\lambda)$

$X(t)$: aantal werkende machines op tijdstip t.

$X(t)$ is een geboorte-sterfte proces met toestandsruimte $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ en overgangsintensiteiten:

$\mu_i = i\mu,$ voor $1 \leq i \leq N.$

$\lambda_i = \min(N-i, M)\lambda,$ voor $0 \leq i \leq N-1.$

Variatie 1 op de machinewerkplaats

Twee onafhankelijke machines. Machine $i (i = 1, 2)$ afwisselend in bedrijf en in reparatie. Bedrijfsduur $B \sim$ Exp(μ_i). Reparatieduur $R \sim$ Exp(λ_i). B_i en R_i onafhankelijk. Twee reparateurs beschikbaar.

Elke machine: toestand 0 = in reparatie, toestand 1 = in bedrijf,

$X(t)$ = toestand werkplaats op tijdstip t, dan is $\{X(t), t \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ een *CTMC*.

Met het in voorgaande slide verkregen inzicht wordt de intensiteitmatrix R bij de gegeven S.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Variatie 2 op de machinewerkplaats

Twee onafhankelijke machines. Machine $i (i = 1, 2)$ afwisselend in bedrijf en in reparatie. Bedrijfsduur $B \sim \text{Exp}(\mu_i)$. Reparatieduur $R \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. B_i en R_i onafhankelijk. Eén reparateur beschikbaar.

Met $X(t)$ = (aantal machines in reparatie, welke machine in reparatie bij monteur) = toestand werkplaats op tijdstip t, is $\{X(t), t \geq 0\}$ met $S = \{(2,1), (2,2), (1,1), (1,2), (0,*)\}$ een *CTMC*.

De intensiteitmatrix R bij deze gegeven S.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

HET POISSON PROCES

In veel praktische toepassingen kan het aaankomstproces van personen, orders, ... , gemodelleerd worden door een zogenaamd *Poisson proces*.

Definitie van een Poisson proces:

Een Poisson proces met intensiteit λ (notatie $PP(\lambda)$) is een stochastisch proces $\{N(t), t \geq 0\}$ dat het aantal gebeurtenissen telt in het interval $(0, t)$, waarbij de tijden tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen zijn met parameter λ.

Notatie:
$S_0 = 0$,
$S_n =$ tijdstip van de n-de gebeurtenis,
$T_n = S_n - S_{n-1} =$ tijd tussen n-de en $(n-1)$-de gebeurtenis.

$\{T_n, n \geq 0\}$ is rij van onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen met parameter λ.

Stelling:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

en dus $N(t)$ is Poisson verdeeld met parameter λt.
(daarom heet dit proces een Poisson proces)

In het bijzonder geldt $E(N(t)) = \lambda t$. Dit verklaart waarom λ de *intensiteit* van het Poisson proces heet.

Merk op dat $N(t)$ een continue-tijd Markov keten is met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, , \ldots\}$ en $r_i = \lambda$ en $p_{i,i+1} = 1$ voor alle $i \in S$.

Belangrijker is echter dat $N(t)$ vaak als aankomstproces wordt gebruikt in situaties waarbij wachtrijen ontstaan.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS

Het $M/M/1/K$ wachtrijmodel

- Stel klanten arriveren bij een betaalautomaat volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De behandelingstijden van klanten bij de automaat zijn onafhankelijk, exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Klanten worden First Come First Served (FCFS) behandeld.
- Klanten die bij aankomst K andere klanten bij de automaat aantreffen gaan ergens anders geld halen.

$X(t)$, het aantal klanten bij de betaalautomaat op tijdstip t, is een continue-tijd Markov keten.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS (VERVOLG)

Call center

M telefonisten en H wachtplaatsen

Aankomstproces van gesprekken is Poisson proces met intensiteit λ.

Gespreksduren zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.

$X(t)$: aantal gespreksaanvragen in het systeem (in behandeling of in de wachtstand) op tijdstip t.

$X(t)$ is geboorte-sterfte proces met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, \ldots, K\}$ waarbij $K = M + H$ en overgangsintensiteiten:

$\lambda_i = \lambda$ voor $0 \leq i \leq K - 1$.
$\mu_i = \min{(i, M)}\mu$, voor $1 \leq i \leq K$.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS (VERVOLG)

Voorraadmodel:

- Zodra als voorraad tot niveau k zakt bestel je r nieuwe produkten.
- Als op het moment dat bestelling geleverd wordt de voorraad nog steeds $\leq k$ is, plaats je onmiddellijk weer een bestelling.
- Zo niet, dan wacht je tot voorraad weer tot niveau k zakt voor je een bestelling plaatst.
- Levertijden van bestellingen zijn $Exp(\mu)$ verdeeld.
- Vraag naar produkten is een Poissonproces met intensiteit λ.
- Vraag die niet uit voorraad geleverd kan worden gaat verloren.
- $X(t)$: aantal produkten op voorraad op tijdstip t.

Dan is $\{X(t) : t \geq 0\}$ een CTMC.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS (VERVOLG)

Produktiemodel

- Op machine worden produkten op voorraad geproduceerd.
- Als de machine aan staat, produceert hij produkten volgens Poisson proces met intensiteit λ.
- Vraag naar produkten is Poisson proces met intensiteit μ.
- Machine wordt uitgezet als voorraad gelijk is aan opslagcapaciteit K.
- Machine wordt weer aangezet als voorraad gezakt is naar niveau k.
- $X(t)$: aantal produkten op voorraad op tijdstip t.
- $Y(t)$: toestand machine op tijdstip t. (Belangrijk als $k < X(t) < K$)

Dan is $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ een CTMC.