Definitie van continue-tijd Markov keten:

Een stochastisch proces $\{X(t), t \geq 0\}$ met toestandsruimte S heet een *continue-tijd Markov keten (CTMC)* als voor alle i en j in S en voor alle tijden $s, t \geq 0$ geldt

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u), 0 \leq u < s) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i).$$

In woorden:

"Gegeven het *heden* $X(s)$ en het *verleden* $X(u), 0 \leq u < s$ van het proces hangt de *toekomst* $X(s+t)$ alleen af van het heden en niet van het verleden."

Beschrijving continue-tijd Markov keten

Een continue-tijd Markov keten is een stochastisch proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ met toestandsruimte $S = \{1, \ldots, N\}$ waarvoor het volgende geldt:

- het proces verblijft een exponentiële tijd, zeg met parameter r_i in toestand i,
- daarna springt het proces, onafhankelijk van het verleden van het proces, met kans $p_{i,j}$ naar toestand j,
- vervolgens verblijft het proces een exponentiële tijd, zeg met parameter r_j in toestand j,
- daarna springt het proces, onafhankelijk van het verleden van het proces, met kans $p_{j,k}$ naar toestand k,
- enzovoorts .....

Visualisatie continue-tijd Markov keten

Net als bij een discrete-tijd Markov keten visualiseren we een continue-tijd Markov keten met behulp van een gerichte graaf.

Als we van toestand i naar toestand j kunnen springen zetten we van knoop i naar knoop j een pijl met daar boven de grootheid

$$r_{i,j} = r_i p_{i,j}.$$

De grootheid $r_{i,j}$ is de *overgangsintensiteit* van toestand i naar toestand j.

Interpretatie van overgangsintensiteit:

Als we naar een klein intervalletje ter lengte dt kijken, dan is de kans dat het proces in dat intervalletje van i naar j springt gelijk aan $r_{i,j}dt$.
(als het proces in toestand i zit wil het $r_{i,j}$ keer per tijdseenheid van toestand i naar toestand j springen)

De rol die de 1-staps overgangsmatrix P had bij een DTMC wordt nu dus overgenomen door de intensiteitmatrix R

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,N} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{N,1} & r_{N,2} & \dots & r_{N,N} \end{pmatrix}$$

Wanneer je van een CTMC de beginverdeling en de intensiteitmatrix R hebt beschreven, heb je het stochastisch gedrag van het proces in zijn geheel beschreven.

HET POISSON PROCES

In veel praktische toepassingen kan het aaankomstproces van personen, orders, ... , gemodelleerd worden door een zogenaamd *Poisson proces*.

Definitie van een Poisson proces:

Een Poisson proces met intensiteit λ (notatie $PP(\lambda)$) is een stochastisch proces $\{N(t), t \geq 0\}$ dat het aantal gebeurtenissen telt in het interval $(0, t)$, waarbij de tijden tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen zijn met parameter λ.

Notatie:
$S_0 = 0$,
$S_n =$ tijdstip van de n-de gebeurtenis,
$T_n = S_n - S_{n-1} =$ tijd tussen n-de en $(n-1)$-de gebeurtenis.

$\{T_n, n \geq 0\}$ is rij van onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen met parameter λ.

Stelling:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

en dus $N(t)$ is Poisson verdeeld met parameter λt.
(daarom heet dit proces een Poisson proces)

In het bijzonder geldt $E(N(t)) = \lambda t$. Dit verklaart waarom λ de *intensiteit* van het Poisson proces heet.

Merk op dat $N(t)$ een continue-tijd Markov keten is met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, , \ldots\}$ en $r_i = \lambda$ en $p_{i,i+1} = 1$ voor alle $i \in S$.

Belangrijker is echter dat $N(t)$ vaak als aankomstproces wordt gebruikt in situaties waarbij wachtrijen ontstaan.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS

Het $M/M/1/K$ wachtrijmodel

- Stel klanten arriveren bij een betaalautomaat volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De behandelingstijden van klanten bij de automaat zijn onafhankelijk, exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Klanten worden First Come First Served (FCFS) behandeld.
- Klanten die bij aankomst K andere klanten bij de automaat aantreffen gaan ergens anders geld halen.

$X(t)$, het aantal klanten bij de betaalautomaat op tijdstip t, is een continue-tijd Markov keten.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS (VERVOLG)

Call center

M telefonisten en H wachtplaatsen

Aankomstproces van gesprekken is Poisson proces met intensiteit λ.

Gespreksduren zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.

$X(t)$: aantal gespreksaanvragen in het systeem (in behandeling of in de wachtstand) op tijdstip t.

$X(t)$ is geboorte-sterfte proces met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, \ldots, K\}$ waarbij $K = M + H$ en overgangsintensiteiten:

$$\lambda_i = \lambda \qquad \text{voor } 0 \leq i \leq K - 1.$$
$$\mu_i = \min\,(i, M)\mu, \qquad \text{voor } 1 \leq i \leq K.$$

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS (VERVOLG)

Voorraadmodel:

- Zodra als voorraad tot niveau k zakt bestel je r nieuwe produkten.
- Als op het moment dat bestelling geleverd wordt de voorraad nog steeds $\leq k$ is, plaats je onmiddellijk weer een bestelling.
- Zo niet, dan wacht je tot voorraad weer tot niveau k zakt voor je een bestelling plaatst.
- Levertijden van bestellingen zijn $Exp(\mu)$ verdeeld.
- Vraag naar produkten is een Poissonproces met intensiteit λ.
- Vraag die niet uit voorraad geleverd kan worden gaat verloren.
- $X(t)$: aantal produkten op voorraad op tijdstip t.

Dan is $\{X(t) : t \geq 0\}$ een CTMC.

VOORBEELDEN VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS (VERVOLG)

Produktiemodel

- Op machine worden produkten op voorraad geproduceerd.
- Als de machine aan staat, produceert hij produkten volgens Poisson proces met intensiteit λ.
- Vraag naar produkten is Poisson proces met intensiteit μ.
- Machine wordt uitgezet als voorraad gelijk is aan opslagcapaciteit K.
- Machine wordt weer aangezet als voorraad gezakt is naar niveau k.
- $X(t)$: aantal produkten op voorraad op tijdstip t.
- $Y(t)$: toestand machine op tijdstip t. (Belangrijk als $k < X(t) < K$)

Dan is $\{(X(t), Y(t)) : t \geq 0\}$ een CTMC.

Net als bij een discrete-tijd Markov keten is men bij de bestudering van een continue-tijd Markov keten zowel geïnteresseerd in het korte-termijn gedrag als in het lange-termijn gedrag.

Vragen die je wilt beantwoorden zijn:

- Wat is de kans dat het proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ zich op tijdstip t in een bepaalde toestand bevindt? (transiënte verdeling)
- Wat is de kans dat het proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ zich voor $t \to \infty$ in een bepaalde toestand bevindt? (limietverdeling)
- Welk deel van de tijd bevindt het stochastisch proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ zich in een bepaalde toestand? (occupatieverdeling)

Wij zullen ons wel op het lange-termijn gedrag van CTMC's richten maar niet op het korte-termijn gedrag. De secties 4.4 en 4.5 uit het boek zullen we overslaan.

LIMIETGEDRAG VAN CONTINUE-TIJD MARKOV KETENS

Hoofdstelling over het limietgedrag van continue-tijd Markov ketens formuleren.

Stelling:
Een irreducibele, continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ heeft een unieke limietverdeling, een unieke stationaire verdeling en een unieke occupatieverdeling. De drie verdelingen zijn gelijk en ze worden gegeven door de unieke oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$p_j r_j = \sum_{i=1}^{N} p_i r_{i,j}, \qquad 1 \le j \le N,$$

waarvoor bovendien geldt dat $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Opmerking: In het geval van continue-tijd Markov ketens hoeven we ons geen zorgen te maken over periodiciteit/aperiodiciteit van de Markov keten.

Toelichting bij het ontstaan van het stelsel vergelijkingen voor de limiet-/evenwichtskansen $p_1, p_2, \dots, p_N$.

De kans op "vertrek" uit $j \in S$ in het interval $(t, t+dt]$ na een verblijftijd t is: $p_j r_j dt$

De kans op "binnenkomen" in $j \in S$ in het interval $(t, t+dt]$ na een verblijftijd t elders is: $\sum_{i=1}^{N} p_i r_{i,j} dt$

Deze kansen zijn in de limiet-/evenwichtssituatie, waarin de kans op een toestand $j \in S$ niet meer in de tijd verandert, gelijk, dus

$p_j r_j = \sum_{i=1}^{N} p_i r_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, N$ met $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$.

Balansargument in intensiteitdiagram:

"Uitstroom toestand j = Instroom toestand j".

levert eenvoudig het voorgaande stelsel vergelijkingen.

Met behulp van de hoofdstelling kan de limietverdeling van een irreducibele CTMC dus uitgerekend worden.

Voorbeeld: Machine die afwisselend werkt en kapot is

Levensduur van machine: $Exp(1/10)$ verdeeld (gemiddeld 10 dagen)
Reparatieduur van machine: $Exp(1)$ verdeeld (gemiddeld 1 dag)

Toestand 0: machine kapot; Toestand 1: machine werkt;

Dan geldt

$$p_0 \cdot 1 = p_1 \cdot 1/10, \quad p_1 \cdot 1/10 = p_0 \cdot 1, \quad p_0 + p_1 = 1.$$

En dus

$$p_0 = 1/11, \quad p_1 = 10/11.$$

Beschouw geboorte-sterfte proces met toestandsruimte $\{0, 1, \ldots, K\}$ en met de intensiteiten vanuit een toestand naar buurtoestanden:

λ_i: de intensiteit van toestand i naar toestand $i+1$ $(i = 0, 1, \ \ldots, K-1)$.
μ_i: de intensiteit van toestand i naar toestand $i-1$ $(i = 1, 2, \ \ldots, K)$.

Op basis van het Balansargument: “Uitstroom toestand j = Instroom toestand j”, volgt een stelsel vergelijkingen voor de limiet/evenwichtskansen:

$$
\begin{aligned}
&p_0\lambda_0 = p_1\mu_1,\\
&p_1(\lambda_1 + \mu_1) = p_0\lambda_0 + p_2\mu_2,\\
&p_2(\lambda_2 + \mu_2) = p_1\lambda_1 + p_3\mu_3,\\
&\vdots\\
&p_{i-1}(\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}) = p_{i-2}\lambda_{i-2} + p_i\mu_i,\ (i = 4, 5, \ldots, K)\\
&\vdots\\
&p_K\mu_K = p_{K-1}\lambda_{K-1} \text{ en met } \textstyle\sum_{i=0}^{K} p_i = 1.
\end{aligned}
$$

Uit voorgaand stelsel vergelijkingen is bij geboorte-sterfte processen een eenvoudiger stelsel af te leiden door combinatie van de oorspronkelijke vergelijkingen. Deze vergelijkingen heten “snedevergelijkingen”.

$$
\begin{aligned}
&p_0\lambda_0 = p_1\mu_1,\\
&p_1\lambda_1 = p_2\mu_2,\\
&\vdots\\
&p_{i-1}\lambda_{i-1} = p_i\mu_i,\ (i = 3, 4, \ldots, K),
\end{aligned}
$$

In de limietsituatie is de kans om van “links naar rechts door een snede te gaan” even groot als andersom.

Oplossing: druk elke kans p_i uit in p_0; daarna volgt p_0 uit $\sum_{i=0}^{K} p_i = 1$.

Vier onafhankelijke machines 1, 2, 3, 4. Bedrijfsduur (uur) elke machine is $B \sim$ Exp$(\frac{1}{72})$, reparatieduur (uur) wegens defect is $R \sim$ Exp$(\frac{1}{2})$. Twee reparateurs beschikbaar.

$X(t)$ = aantal machines op tijd t in bedrijf.
De intensiteitmatrix R bij deze *CTMC* met $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ wordt

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{72} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 \end{pmatrix}$$

De snedevergelijkingen en normalisatievergelijking zijn:

$$p_0 = \tfrac{1}{72}p_1,\ p_1 = \tfrac{1}{36}p_2,\ p_2 = \tfrac{1}{24}p_3,\ \tfrac{1}{2}p_3 = \tfrac{1}{18}p_4,\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Oplossing: $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{624745}(1, 72, 2592, 62208, 559872)$.

Twee resterende onderwerpen van CTMCs.

- Lange-termijn gemiddelde kosten per tijdseenheid
  (Long-run cost rate, paragraaf 4.7.2)

- Verwachte tijd tot je voor het eerst in bepaalde toestanden komt
  (First-passage time, paragraaf 4.8)

Lange-termijn gemiddelde kosten per tijdseenheid

Stel dat wanneer de CTMC zich in toestand i bevindt, dit kosten $c(i)$ per tijdseenheid met zich meebrengt. Definiëer verder $g(i, T)$ als de totale verwachte kosten in het interval $[0, T]$ wanneer de CTMC start in toestand i. De lange-termijn gemiddelde kosten per tijdseenheid bij start in i worden dan gegeven door

$$g(i) := \lim_{T\to\infty} \frac{g(i,T)}{T}.$$

Stelling:
Voor een irreducibele CTMC met limietverdeling $p = [p_1, \ldots, p_N]$ geldt

$$g(i) = g = \sum_{j=1}^{N} p_j c(j).$$

Idee: Onafhankelijk van de begintoestand brengt de CTMC een deel p_j in toestand j door en het verblijf in toestand j brengt kosten $c(j)$ per tijdseenheid met zich mee.

Voorbeeld: Telefooncentrale

- 6 beschikbare telefoonlijnen
- Aankomstproces nieuwe gesprekken: Poissonproces met intensiteit van 4 gesprekken per minuut
- Gespreksduren zijn exponentiëel verdeeld met een gemiddelde duur van 2 minuten
- Gespreksaanvragen die aankomen als alle lijnen vol zijn gaan verloren
- Gesprekskosten per gebruiker: 10 cent per minuut

Vragen:

- Wat is de verwachte opbrengst per minuut?
- Hoeveel geld gaat er per minuut verloren doordat alle lijnen bezet zijn?

Verwachte tijd tot je voor het eerst in bepaalde toestanden komt

Laat A een deelverzameling van de toestandsruimte zijn en definieer $m_i(A)$ als de verwachte tijd totdat CTMC voor het eerst in deelverzameling A komt bij start in toestand i.

Dan geldt $m_i(A) = 0$ als $i \in A$ en verder

$$m_i(A) = \frac{1}{r_i} + \sum_{j \in S \setminus A} \frac{r_{i,j}}{r_i} m_j(A), \quad i \notin A.$$

Idee bewijs:

CTMC verblijft eerst een exponentiële tijd met parameter r_i in toestand i en springt daarna met kans $p_{i,j} = r_{i,j}/r_i$ naar toestand j.

Het bovenstaande stelsel vergelijkingen kan eenvoudig opgelost worden.

Voorbeeld: Betaalautomaat

- Stel klanten arriveren bij een betaalautomaat volgens een Poisson proces met een intensiteit van 10 klanten per uur.
- De behandelingstijden van klanten bij de automaat zijn onafhankelijk, exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van 4 minuten.
- Klanten worden First Come First Served (FCFS) behandeld.
- Klanten die bij aankomst 5 andere klanten bij de automaat aantreffen gaan ergens anders geld halen.

Vraag:

Als er op dit moment 1 klant bij de betaalautomaat staat, hoe lang duurt het dan totdat voor het eerst niemand meer bij de betaalautomaat aanwezig is?

VERNIEUWINGSPROCESSEN

In hoofdstuk 3 hebben we gezien wat een *Poisson proces* is.

Definitie van een Poisson proces:

Een Poisson proces met intensiteit λ (notatie $PP(\lambda)$) is een stochastisch proces $\{N(t), t \geq 0\}$ dat het aantal gebeurtenissen telt in het interval $(0, t)$, waarbij de tijden tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen zijn met parameter λ.

Notatie:
$S_0 = 0$,
$S_n =$ tijdstip van de n-de gebeurtenis,
$T_n = S_n - S_{n-1} =$ tijd tussen n-de en $(n-1)$-de gebeurtenis.

$\{T_n, n \geq 0\}$ is rij van onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen met parameter λ.

Een Poisson proces is een speciaal geval van een *vernieuwingsproces*

Definitie van een vernieuwingsproces:
Een vernieuwingsproces is een stochastisch proces $\{N(t), t \geq 0\}$ dat het aantal gebeurtenissen (= vernieuwingen) telt in het interval $(0, t)$, waarbij de tijden tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen zijn.

Notatie (als voorheen):
$S_0 = 0$,
$S_n =$ tijdstip van de n-de gebeurtenis,
$T_n = S_n - S_{n-1} =$ tijd tussen n-de en $(n-1)$-de gebeurtenis.

$\{T_n, n \geq 0\}$ is dus een rij van onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen.

Als de stochastische variabelen $\{T_n, n \geq 0\}$ exponentiëel verdeeld zijn noemen we het vernieuwingsproces dus een Poisson proces.

Voorbeelden vernieuwingsprocessen

- Correctieve vervanging

  (identiek verdeelde levensduren + vervanging alleen als apparaat stuk is)

- Correctieve + preventieve vervanging

  (identiek verdeelde levensduren + vervanging als apparaat stuk is of een bepaalde leeftijd bereikt)

- Aantal bezoeken van CTMC aan bepaalde toestand

  (Start op tijdstip 0 in i en tel het aantal keren dat CTMC na tijdstip 0 toestand i binnenkomt)

Stelling:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}, \qquad \text{met kans } 1,$$

waarbij τ de verwachte tijd tussen twee opeenvolgende vernieuwingen is.

In woorden:

Het aantal vernieuwingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is, is met kans 1 gelijk aan 1 gedeeld door de verwachte tijd tussen twee opeenvolgende vernieuwingen.

Het bewijs van bovenstaande stelling is gebaseerd op de

sterke wet van de grote aantallen.

Sterke wet van de grote aantallen

Stel $\{T_n, n \geq 0\}$ een rij van onderling onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met gemiddelde τ en zij $S_n = T_1 + \cdots + T_n$.

Dan geldt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S_n}{n} = \tau, \qquad \text{met kans } 1.$$

Bewijs van Stelling $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$:

Per definitie

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$$

en dus

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

Volgens de sterke wet van de grote aantallen gaan zowel de term helemaal links als de term helemaal rechts naar τ als $t \to \infty$. En dus volgt uit de insluitstelling dat ook

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau.$$

(en dus $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$).

Voorbeeld: correctieve vervanging

Stel levensduren $U[1,5]$ verdeeld. Dan geldt $\tau = 3$ en dus is het aantal vervangingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is met kans 1 gelijk aan $1/3$.

Voorbeeld: correctieve + preventieve vervanging

Stel levensduren $U[1,5]$ verdeeld en apparaten worden preventief vervangen als de leeftijd 3 is.

Dan geldt dat de gemiddelde tijd tussen 2 vervangingen (correctief of preventief) 2.5 is (ga na!) en dus is het aantal vervangingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is met kans 1 gelijk aan 0.4.

Vraag: Wat is het aantal correctieve (resp. preventieve) vervangingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is?