WACHTRIJMODELLEN

Verschillende soorten toepassingen

- alledaagse toepassingen;
- toepassingen uit produktieomgeving;
- toepassingen in de communicatiesfeer.

Typische onderdelen van een wachtrijmodel

- aankomstproces van klanten;
- wachtruimte (met eindige of oneindige capaciteit);
- bedieningsstation (met één of meerdere bediendes).

Merk op dat we altijd spreken over klanten en bediendes.
Klanten kunnen zijn: mensen, produkten, berichten, ...
Bediendes kunnen zijn: mensen, machines, communicatiekanalen, ...

Vragen die we willen beantwoorden zijn:

- Hoeveel klanten zijn er gemiddeld tegelijkertijd in het systeem?
- Hoelang zijn klanten gemiddeld in het systeem?
- Welk deel van de klanten wordt bediend en welk deel van de klanten gaat verloren vanwege de eindige capaciteit van de wachtruimte?
- Wat is de bezettingsgraad van de bediendes (i.e., welk deel van de tijd zijn ze bezig)?

We zullen kijken naar modellen voor één enkel station. (Netwerken van wachtrijen behoort dit jaar NIET tot de collegestof!)

Kendall's notatie voor wachtrijmodellen $\cdot/\cdot/\cdot/\cdot$

- De eerste plaats vertelt iets over de tussenaankomsttijden van klanten.
- De tweede plaats vertelt iets over de bedieningstijden van klanten.
- De derde plaats vertelt iets over het aantal bediendes.
- De vierde plaats vertelt iets over het maximaal aantal klanten dat tegelijk in het systeem kan zijn (in bediening of in de wachtrij).

Op de eerste twee plaatsen kunnen letters ingevuld worden als

- M: Memoryless (= Exponential)
- G: General
- D: Deterministic
- E: Erlang
- H: Hyperexponential
- U: Uniform

Als in de notatie de vierde plaats wordt weggelaten, nemen we aan dat het aantal klanten tegelijk in het systeem onbegrensd groot mag worden.

Voorbeelden wan wachtrijmodellen zijn dus: $M/G/1, U/U/1, M/M/6/6$

Daarnaast moet je nog iets vertellen over de *bedieningsdiscipline* in je model (de volgorde waarin klanten bediend worden). Je kan hierbij denken aan:

- FCFS: First Come First Served
- LCFS: Last Come First Served
- ROS: Random Order of Service
- SPTF: Shortest Processing Time First
- LPTF: Longest Processing Time First
- Prioriteiten

Wij nemen altijd aan: FCFS bedieningsdiscipline.

Enkele algemene resultaten voor wachtrijmodellen

Notatie:

A_n: moment waarop n-de klant aankomt (hierbij tellen we klanten die NIET toegelaten worden WEL mee).

E_n: moment waarop n-de toegelaten klant aankomt (hierbij tellen we klanten die NIET toegelaten worden dus NIET mee).

D_n: moment waarop n-de toegelaten klant vertrekt.

$W_n = D_n - E_n$: verblijftijd van de n-de toegelaten klant.

Notatie (vervolg):

$X(t)$: het aantal klanten in het systeem op tijdstip t.

$\hat{X}_n = X(A_n^-)$: het aantal klanten dat de n-de aankomende klant bij aankomst aantreft (exclusief zichzelf).

$X_n^* = X(E_n^-)$: het aantal klanten dat de n-de toegelaten klant bij aankomst aantreft (exclusief zichzelf).

$X_n = X(D_n^+)$: het aantal klanten dat de n-de toegelaten klant bij vertrek achterlaat.

Met $p_j, \hat{\pi}_j, \pi_j^*$ en π_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, noteren we de limietverdelingen (= occupatieverdelingen) van respectievelijk $X(t), \hat{X}_n, X_n^*$ en X_n.

Resultaten:

1. Als het aankomstproces van klanten een Poissonproces is dan geldt

$$p_j = \hat{\pi}_j \quad \text{voor alle } j.$$

2. Als klanten één voor één aankomen en vertrekken dan geldt

$$\pi_j = \pi_j^* \quad \text{voor alle } j$$

3. Als het aantal klanten tegelijk in het systeem onbegrensd groot mag worden (en dus alle klanten toegelaten worden) dan geldt natuurlijk

$$\pi_j^* = \hat{\pi}_j \quad \text{voor alle } j.$$

Combinatie van deze drie resultaten geeft dat voor een $M/G/1$ (en dus ook voor een $M/M/1$, $M/D/1$, ...) wachtrij geldt:

$$p_j = \hat{\pi}_j = \pi_j^* = \pi_j \quad \text{voor alle } j.$$

De eigenschap dat, als het aankomstproces van klanten een Poissonproces is, er geldt

$$p_j = \hat{\pi}_j \quad \text{voor alle } j$$

heet de *PASTA eigenschap*: Poisson Arrivals See Time Averages.

Een veel gebruikte formule uit de wachtrijtheorie is de *formule van Little*.

Gegeven een willekeurig systeem en laat

- L: het gemiddeld aantal klanten op de lange termijn in het systeem;
- λ: het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid het systeem binnenkomt (de aankomstintensiteit van klanten);
- W: de gemiddelde tijd dat klanten zich op de lange termijn in het systeem bevinden.

Dan geldt

$$L = \lambda W.$$

In de formule van Little kan het woord systeem op meerder manieren geïnterpreteerd worden.

Het kan zijn

- wachtruimte + bedieningsstation;
- wachtruimte;
- bedieningsstation.

Dit leidt tot verschillende varianten van de formule.
($L = \lambda W$, $L_q = \lambda W_q$, $B = \lambda \tau, \ldots$)

Verder kan je bij de klanten die per tijdseenheid het systeem binnenkomen de klanten die niet toegelaten worden wel of niet meerekenen.

Het $M/M/1/K$ wachtrijmodel

- Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De bedieningstijden van klanten zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Er is één bediende die de klanten in volgorde van aankomst behandeld.
- Klanten die bij aankomst K andere klanten bij de bediende aantreffen gaan verloren.
- Alle stochastische variabelen (bedieningstijden, tussenaankomsttijden) zijn onafhankelijk van elkaar.

Het proces $\{X(t), t \geq 0\}$, het aantal klanten in het systeem op tijdstip t, is dan een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $\{0, 1, \ldots, K\}$, intensiteitenmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ \mu & 0 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & 0 & \lambda \\ & & & \mu & 0 \end{pmatrix},$$

en limietverdeling

$$p_i = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = i) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \cdot \rho^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, K,$$

waarbij $\rho = \lambda/\mu$.

Bovenstaande formule geldt alleen voor $\rho \neq 1$ (i.e., $\lambda \neq \mu$). Ga zelf na wat er gebeurt als $\rho = 1$.

Met behulp van de limietverdeling kunnen allerlei prestatiematen uitgerekend worden:

- bezettingsgraad (= fractie van de tijd dat de bediende bezig is);
- verlieskans van klanten (= kans dat aankomende klant verloren gaat);
- doorzet (= aantal klanten dat per tijdseenheid bediend wordt);
- het gemiddeld aantal klanten in de wachtrij, bij de bediende en in het systeem (= wachtrij + bediende);
- gemiddelde tijd dat klanten in het systeem zijn;
  (inclusief / exclusief de klanten die niet behandeld zijn)
- gemiddelde tijd dat klanten in de wachtrij staan.

Stabiliteitseigenschap

Stelling:

Beschouw een wachtrijstation met s bediendes en *oneindige* wachtruimte. Als de aankomstintensiteit van klanten gelijk aan λ is en de gemiddelde bedieningstijd van klanten gelijk is aan τ dan zal moeten gelden

$$\lambda\tau < s$$

om te zorgen dat het systeem *stabiel* is (d.w.z. dat de lengte van de wachtrij niet op de lange termijn oneindig groot wordt).

In het vervolg zullen we alleen maar kijken naar wachtrijsystemen die stabiel zijn. Merk op dat wachtrijsystemen met *eindige* wachtruimte altijd stabiel zijn.

Het $M/M/1$ wachtrijmodel

- Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De bedieningstijden van klanten zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Er is één bediende die de klanten in volgorde van aankomst behandeld.
- Alle klanten die aankomen worden in het systeem toegelaten (de capaciteit van de wachtruimte is onbegrensd).
- Alle stochastische variabelen (bedieningstijden, tussenaankomsttijden) zijn onafhankelijk van elkaar.

Stabiliteitsvoorwaarde:

$$\lambda < \mu \qquad \text{oftewel} \qquad \rho = \lambda/\mu < 1.$$

Het proces $\{X(t), t \geq 0\}$, het aantal klanten in het systeem op tijdstip t, is wederom een continue-tijd Markov keten, nu met oneindige toestandsruimte $\{0, 1, \ldots\}$, intensiteitenmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & 0 & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & 0 & \lambda & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

en limietverdeling

$$p_i = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = i) = (1-\rho)\cdot\rho^i, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

waarbij $\rho = \lambda/\mu$.

Wederom kunnen met behulp van de limietverdeling allerlei prestatiematen uitgerekend worden.

Prestatiematen in het $M/M/1$ model:

- bezettingsgraad: ρ
- doorzet: λ
- het gemiddeld aantal klanten in het systeem: $\rho/(1-\rho)$
- het gemiddeld aantal klanten bij de bediende: ρ
- het gemiddeld aantal klanten in de wachtrij: $\rho^2/(1-\rho)$
- gemiddelde tijd dat klanten in het systeem zijn: $1/[\mu(1-\rho)]$
- gemiddelde tijd dat klanten bij de bediende zijn: $1/\mu$
- gemiddelde tijd dat klanten in de wachtrij staan:$\rho/[\mu(1-\rho)]$

De analyse en resultaten van de voorgaande twee modellen (het $M/M/1/K$ model en het $M/M/1$ model) kunnen uitgebreid worden naar modellen met meerdere bediendes.

We zullen de volgende modellen bekijken:

- Het $M/M/s/K$ model;
- Het $M/M/s$ model;
- Het $M/M/\infty$ model

Het $M/M/s/K$ wachtrijmodel

- Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De bedieningstijden van klanten zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Er zijn s bediendes die de klanten in volgorde van aankomst behandelen.
- Klanten die bij aankomst K ($K \geq s$) andere klanten bij de bediende aantreffen gaan verloren.

Het proces $\{X(t), t \geq 0\}$, het aantal klanten in het systeem op tijdstip t, is dan weer een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $\{0, 1, \ldots, K\}$.

De snedevergelijkingen geven

$$\begin{aligned}\lambda p_{i-1} &= i\mu p_i, \qquad i=1,\ldots,s,\\ \lambda p_{i-1} &= s\mu p_i, \qquad i=s+1,\ldots,K.\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}p_i &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}\,p_0, \qquad i=0,\ldots,s,\\ p_{s+k} &= \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k p_s = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!}\,p_0, \qquad k=0,\ldots,K-s.\end{aligned}$$

Uit de vergelijking $\sum_{i=0}^{K} p_i = 1$ kan tenslotte de onbekende p_0 bepaald worden.

Met behulp van de limietverdeling kunnen weer allerlei prestatiematen uitgerekend worden.

Het $M/M/s$ wachtrijmodel

- Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De bedieningstijden van klanten zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Er zijn s bediendes die de klanten in volgorde van aankomst behandelen.

Stabiliteitsvoorwaarde:

$$\lambda < s \cdot \mu \qquad \text{oftewel} \qquad \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} < 1.$$

Het proces $\{X(t), t \geq 0\}$, het aantal klanten in het systeem op tijdstip t, is wederom een continue-tijd Markov keten met oneindige toestandsruimte.

De snedevergelijkingen geven

$$\begin{aligned} \lambda p_{i-1} &= i\mu p_i, \qquad i = 1, \ldots, s, \\ \lambda p_{i-1} &= s\mu p_i, \qquad i = s+1, \ldots . \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} p_i &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} p_0, \qquad i = 0, \ldots, s, \\ p_{s+k} &= \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k p_s = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} p_0, \qquad k = 0, \ldots . \end{aligned}$$

Uit de vergelijking $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ kan tenslotte de onbekende p_0 bepaald worden.

Met behulp van de limietverdeling kunnen weer allerlei prestatiematen uitgerekend worden.

Prestatiematen in het $M/M/s$ model:

$$\begin{aligned}\Pi_W &= \text{kans dat een klant moet wachten,}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{s+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k p_s = \frac{p_s}{1-\rho}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \text{verwachte aantal bezette bediendes,}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \min(i,s)\, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{i-1} = \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_q &= \text{verwachte aantal wachtende klanten,}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_{s+k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k p_s = p_s \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\end{aligned}$$

$$W_q = L_q/\lambda, \quad L = L_q + B, \quad W = L/\lambda = W_q + 1/\mu$$

Het $M/M/\infty$ model

- Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- Bedieningstijden zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Er is een onbegrensd aantal bediendes die de klanten behandelen. (Klanten gaan dus altijd direct bij aankomst in bediening)

Het proces $\{X(t), t \geq 0\}$, het aantal klanten in het systeem op tijdstip t, is wederom een continue-tijd Markov keten met oneindige toestandsruimte.

De limietverdeling wordt gegeven door

$$p_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} e^{-\lambda/\mu}, \qquad i = 0, \ldots .$$

Het aantal klanten in het systeem is dus Poisson verdeeld met parameter λ/μ.