VERNIEUWINGSPROCESSEN

In hoofdstuk 3 hebben we gezien wat een *Poisson proces* is.

Definitie van een Poisson proces:

Een Poisson proces met intensiteit λ (notatie $PP(\lambda)$) is een stochastisch proces $\{N(t), t \geq 0\}$ dat het aantal gebeurtenissen telt in het interval $(0, t)$, waarbij de tijden tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen zijn met parameter λ.

Notatie:
$S_0 = 0$,
$S_n =$ tijdstip van de n-de gebeurtenis,
$T_n = S_n - S_{n-1} =$ tijd tussen n-de en $(n-1)$-de gebeurtenis.

$\{T_n, n \geq 0\}$ is rij van onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochastische variabelen met parameter λ.

Een Poisson proces is een speciaal geval van een *vernieuwingsproces*

Definitie van een vernieuwingsproces:
Een vernieuwingsproces is een stochastisch proces $\{N(t), t \geq 0\}$ dat het aantal gebeurtenissen (= vernieuwingen) telt in het interval $(0, t)$, waarbij de tijden tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen zijn.

Notatie (als voorheen):
$S_0 = 0$,
$S_n =$ tijdstip van de n-de gebeurtenis,
$T_n = S_n - S_{n-1} =$ tijd tussen n-de en $(n-1)$-de gebeurtenis.

$\{T_n, n \geq 0\}$ is dus een rij van onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen.

Als de stochastische variabelen $\{T_n, n \geq 0\}$ exponentiëel verdeeld zijn noemen we het vernieuwingsproces dus een Poisson proces.

Voorbeelden vernieuwingsprocessen

- Correctieve vervanging
  (identiek verdeelde levensduren + vervanging alleen als apparaat stuk is)

- Correctieve + preventieve vervanging
  (identiek verdeelde levensduren + vervanging als apparaat stuk is of een bepaalde leeftijd bereikt)

- Aantal bezoeken van CTMC aan bepaalde toestand
  (Start op tijdstip 0 in i en tel het aantal keren dat CTMC na tijdstip 0 toestand i binnenkomt)

Stelling:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}, \qquad \text{met kans } 1,$$

waarbij τ de verwachte tijd tussen twee opeenvolgende vernieuwingen is.

In woorden:

Het aantal vernieuwingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is, is met kans 1 gelijk aan 1 gedeeld door de verwachte tijd tussen twee opeenvolgende vernieuwingen.

Het bewijs van bovenstaande stelling is gebaseerd op de

sterke wet van de grote aantallen.

Sterke wet van de grote aantallen

Stel $\{T_n, n \geq 0\}$ een rij van onderling onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met gemiddelde τ en zij $S_n = T_1 + \cdots + T_n$.

Dan geldt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S_n}{n} = \tau, \qquad \text{met kans } 1.$$

Bewijs van Stelling $\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\tau}$:

Per definitie

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$$

en dus

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

Volgens de sterke wet van de grote aantallen gaan zowel de term helemaal links als de term helemaal rechts naar τ als $t \to \infty$. En dus volgt uit de insluitstelling dat ook

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau.$$

(en dus $\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\tau}$).

Voorbeeld: correctieve vervanging

Stel levensduren $U[1,5]$ verdeeld. Dan geldt $\tau = 3$ en dus is het aantal vervangingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is met kans 1 gelijk aan $1/3$.

Voorbeeld: correctieve + preventieve vervanging

Stel levensduren $U[1,5]$ verdeeld en apparaten worden preventief vervangen als de leeftijd 3 is.

Dan geldt dat de gemiddelde tijd tussen 2 vervangingen (correctief of preventief) 2.5 is (ga na!) en dus is het aantal vervangingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is met kans 1 gelijk aan 0.4.

Vraag: Wat is het aantal correctieve (resp. preventieve) vervangingen dat op den lange termijn per tijdseenheid opgetreden is?

VERNIEUWINGSPROCESSEN MET KOSTEN/OPBRENGSTEN

Stel nu dat we een vernieuwingsproces hebben waarbij iedere keer als we een vernieuwing hebben we kosten maken (dan wel opbrengst hebben).

Op tijdstip T_1 maken we kosten C_1.
Op tijdstip $T_1 + T_2$ maken we kosten C_2.
Op tijdstip $T_1 + T_2 + T_3$ maken we kosten C_3.
Enzovoorts.

Aanname: De rij van stochastische variabelen $\{(T_n, C_n), n \geq 1\}$ is een rij van onafhankelijke, identiek verdeelde bivariate stochastische variabelen.

Let op: T_n en C_n mogen wel van elkaar afhangen, maar als $n \neq n'$ dan geldt dat het paar (T_n, C_n) onafhankelijk is van het paar (T'_n, C'_n)!

Voorbeeld: Correctieve + preventieve vervanging

L_n : Levensduur n-de apparaat. (onafhankelijke stochastische variabelen)

Preventieve vervanging als $L_n > x$.

$$T_n = \min(L_n, x), \quad C_n = \begin{cases} C^{(corr)} & \text{als } L_n < x, \\ C^{(prev)} & \text{als } L_n \geq x. \end{cases}$$

Als $T_n < x$, dan correctieve vervanging en dus $C_n = C^{(corr)}$.
Als $T_n = x$, dan preventieve vervanging en dus $C_n = C^{(prev)}$.

Conclusie: T_n en C_n zijn afhankelijk.

Laat $C(t)$ de som van de kosten zijn die we maken in het interval $[0, t]$ en laat $N(t)$, als voorheen, het aantal vernieuwingen zijn in het interval $[0, t]$.

Dan geldt

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} C_n.$$

Het proces $C(t)$ wat we hier bestuderen wordt vaak een *renewal-reward proces* genoemd (vernieuwingsproces met kosten/opbrengsten).

In het boek wordt echter de naam *cumulatief proces* gebruikt.

In het bijzondere geval dat het proces $N(t)$ een Poisson proces is (d.w.z. dat de stochastische variabelen $T_1, T_2, \ldots$ exponentieel verdeeld zijn) dan wordt het cumulatief proces $C(t)$ ook wel een *compound Poisson proces* genoemd.

Zo'n compound Poisson proces wordt vaak als aankomstproces gebruikt in situaties waarbij aankomsten in batches plaatsvinden.

Voorbeelden:

- vraagproces in een voorraadmodel;
- aankomstproces van orders in produktiemodel;

Eerder hebben we gekeken naar het gedrag van $N(t)$ voor $t \to \infty$:

Stelling:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}, \qquad \text{met kans } 1,$$

waarbij $\tau = E(T_1)$ de verwachte tijd tussen twee vernieuwingen is.

Een soortgelijk resultaat geldt voor het gedrag van $C(t)$ voor $t \to \infty$:

Stelling:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E(C_1)}{E(T_1)}, \qquad \text{met kans } 1.$$

Voorbeeld: correctieve + preventieve vervanging (vervolg)

kosten preventieve vervanging: 500 euro
kosten correctieve vervanging: 1000 euro
Levensduren: Uniform verdeeld tussen 1 en 5 jaar

Vragen:

- Wat zijn de kosten per tijdseenheid als je alleen correctieve vervangingen doet?
- Wat zijn de kosten per tijdseenheid als je een preventieve vervanging doet als de leeftijd van je apparaat 3 jaar is?
- Voor welke keuze van de leeftijd waarbij je een preventieve vervanging doet zijn de kosten minimaal?

WACHTRIJMODELLEN

Verschillende soorten toepassingen

- alledaagse toepassingen;
- toepassingen uit produktieomgeving;
- toepassingen in de communicatiesfeer.

Typische onderdelen van een wachtrijmodel

- aankomstproces van klanten;
- wachtruimte (met eindige of oneindige capaciteit);
- bedieningsstation (met één of meerdere bediendes).

Merk op dat we altijd spreken over klanten en bediendes.
Klanten kunnen zijn: mensen, produkten, berichten, ...
Bediendes kunnen zijn: mensen, machines, communicatiekanalen, ...

Vragen die we willen beantwoorden zijn:

- Hoeveel klanten zijn er gemiddeld tegelijkertijd in het systeem?
- Hoelang zijn klanten gemiddeld in het systeem?
- Welk deel van de klanten wordt bediend en welk deel van de klanten gaat verloren vanwege de eindige capaciteit van de wachtruimte?
- Wat is de bezettingsgraad van de bediendes (i.e., welk deel van de tijd zijn ze bezig)?

In eerste instantie zullen we kijken naar modellen voor één enkel station. Later zullen we ook kijken naar modellen voor meerdere stations (netwerken van wachtrijen).

Kendall's notatie voor wachtrijmodellen $\cdot/\cdot/\cdot/\cdot$

- De eerste plaats vertelt iets over de tussenaankomsttijden van klanten.
- De tweede plaats vertelt iets over de bedieningstijden van klanten.
- De derde plaats vertelt iets over het aantal bediendes.
- De vierde plaats vertelt iets over het maximaal aantal klanten dat tegelijk in het systeem kan zijn (in bediening of in de wachtrij).

Op de eerste twee plaatsen kunnen letters ingevuld worden als

- M: Memoryless (= Exponential)
- G: General
- D: Deterministic
- E: Erlang
- H: Hyperexponential
- U: Uniform

Als in de notatie de vierde plaats wordt weggelaten, nemen we aan dat het aantal klanten tegelijk in het systeem onbegrensd groot mag worden.

Voorbeelden wan wachtrijmodellen zijn dus: $M/G/1, U/U/1, M/M/6/6$

Daarnaast moet je nog iets vertellen over de *bedieningsdiscipline* in je model (de volgorde waarin klanten bediend worden). Je kan hierbij denken aan:

- FCFS: First Come First Served
- LCFS: Last Come First Served
- ROS: Random Order of Service
- SPTF: Shortest Processing Time First
- LPTF: Longest Processing Time First
- Prioriteiten

Wij nemen altijd aan: FCFS bedieningsdiscipline.

Enkele algemene resultaten voor wachtrijmodellen

Notatie:

A_n: moment waarop n-de klant aankomt (hierbij tellen we klanten die NIET toegelaten worden WEL mee).

E_n: moment waarop n-de toegelaten klant aankomt (hierbij tellen we klanten die NIET toegelaten worden dus NIET mee).

D_n: moment waarop n-de toegelaten klant vertrekt.

$W_n = D_n - E_n$: verblijftijd van de n-de toegelaten klant.

Notatie (vervolg):

$X(t)$: het aantal klanten in het systeem op tijdstip t.

$\hat{X}_n = X(A_n^-)$: het aantal klanten dat de n-de aankomende klant bij aankomst aantreft (exclusief zichzelf).

$X_n^* = X(E_n^-)$: het aantal klanten dat de n-de toegelaten klant bij aankomst aantreft (exclusief zichzelf).

$X_n = X(D_n^+)$: het aantal klanten dat de n-de toegelaten klant bij vertrek achterlaat.

Met $p_j, \hat{\pi}_j, \pi_j^*$ en π_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, noteren we de limietverdelingen (= occupatieverdelingen) van respectievelijk $X(t), \hat{X}_n, X_n^*$ en X_n.

Resultaten:

1. Als het aankomstproces van klanten een Poissonproces is dan geldt

$$p_j = \hat{\pi}_j \quad \text{voor alle } j.$$

2. Als klanten één voor één aankomen en vertrekken dan geldt

$$\pi_j = \pi_j^* \quad \text{voor alle } j$$

3. Als het aantal klanten tegelijk in het systeem onbegrensd groot mag worden (en dus alle klanten toegelaten worden) dan geldt natuurlijk

$$\pi_j^* = \hat{\pi}_j \quad \text{voor alle } j.$$

Combinatie van deze drie resultaten geeft dat voor een $M/G/1$ (en dus ook voor een $M/M/1$, $M/D/1$, ...) wachtrij geldt:

$$p_j = \hat{\pi}_j = \pi_j^* = \pi_j \quad \text{voor alle } j.$$

De eigenschap dat, als het aankomstproces van klanten een Poissonproces is, er geldt

$$p_j = \hat{\pi}_j \quad \text{voor alle } j$$

heet de *PASTA eigenschap*: Poisson Arrivals See Time Averages.

Een veel gebruikte formule uit de wachtrijtheorie is de *formule van Little*.

Gegeven een willekeurig systeem en laat

- L: het gemiddeld aantal klanten op de lange termijn in het systeem;
- λ: het gemiddeld aantal klanten dat per tijdseenheid het systeem binnenkomt (de aankomstintensiteit van klanten);
- W: de gemiddelde tijd dat klanten zich op de lange termijn in het systeem bevinden.

Dan geldt

$$L = \lambda W.$$

In de formule van Little kan het woord systeem op meerder manieren geïnterpreteerd worden.

Het kan zijn

- wachtruimte + bedieningsstation;
- wachtruimte;
- bedieningsstation.

Dit leidt tot verschillende varianten van de formule.
($L = \lambda W$, $L_q = \lambda W_q$, $B = \lambda \tau, \dots$)

Verder kan je bij de klanten die per tijdseenheid het systeem binnenkomen de klanten die niet toegelaten worden wel of niet meerekenen.

Het $M/M/1/K$ wachtrijmodel

- Klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit λ.
- De bedieningstijden van klanten zijn exponentiëel verdeeld met parameter μ.
- Er is één bediende die de klanten in volgorde van aankomst behandeld.
- Klanten die bij aankomst K andere klanten bij de bediende aantreffen gaan verloren.
- Alle stochastische variabelen (bedieningstijden, tussenaankomsttijden) zijn onafhankelijk van elkaar.

Het proces $\{X(t), t \geq 0\}$, het aantal klanten in het systeem op tijdstip t, is dan een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $\{0, 1, \ldots, K\}$, intensiteitenmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ \mu & 0 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & 0 & \lambda \\ & & & \mu & 0 \end{pmatrix},$$

en limietverdeling

$$p_i = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = i) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \cdot \rho^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, K,$$

waarbij $\rho = \lambda / \mu$.

Bovenstaande formule geldt alleen voor $\rho \neq 1$ (i.e., $\lambda \neq \mu$). Ga zelf na wat er gebeurt als $\rho = 1$.

Met behulp van de limietverdeling kunnen allerlei prestatiematen uitgerekend worden:

- bezettingsgraad (= fractie van de tijd dat de bediende bezig is);
- verlieskans van klanten (= kans dat aankomende klant verloren gaat);
- doorzet (= aantal klanten dat per tijdseenheid bediend wordt);
- het gemiddeld aantal klanten in de wachtrij, bij de bediende en in het systeem (= wachtrij + bediende);
- gemiddelde tijd dat klanten in het systeem zijn;

  (inclusief / exclusief de klanten die niet behandeld zijn)
- gemiddelde tijd dat klanten in de wachtrij staan.