

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tussentoets Wiskunde 2 (2DD50) op 18 december 2014, 11.00 – 12.30 uur.

1. Gegeven is de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S_X = \{1, 2, 3, 4\}$, beginverdeling $a^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal $a^{(3)}$, de transiënte verdeling van de Markov keten op tijdstip 3.
 - Is de Markov keten reducibel of irreducibel? En is de Markov periodiek of aperiodiek? Leg in beide gevallen uw antwoord duidelijk uit.
 - Bepaal de limietverdeling van de Markov keten, als die bestaat. Als de limietverdeling niet bestaat, bepaal dan de occupatie verdeling.
 - Per keer dat de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ het pad $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ volgt moet 240 euro betaald worden. Per keer dat de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ het pad $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ volgt moet 120 euro betaald worden. Bereken de lange-termijn verwachte kosten per periode.
2. Beschouw de Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en beginverdeling $a^{(0)} = (0, 0, 1, 0)$.

De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de limietverdeling van de Markov keten.
- Wat is de verwachte tijd dat de Markov keten in de doorgangstoestanden verblijft?

3. In een bepaalde functie in een bedrijf kunnen werknemers zich in drie verschillende salarisschalen bevinden, genummerd 1, 2 en 3. De ontwikkeling van de werknemers in deze functie binnen het bedrijf in opeenvolgende jaren kan beschreven worden met behulp van een discrete-tijd Markov keten met 4 toestanden en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbij corresponderen de toestanden 1, 2 en 3 met de drie verschillende salarisschalen en toestand 4 correspondeert met de toestand waarbij de persoon het bedrijf verlaten heeft.

- a) Wat is de kans dat een werknemer die start in salarisschaal 1 ooit salarisschaal 3 zal bereiken?
- b) Het bedrijf start met 16 werknemers in salarisschaal 1, 16 werknemers in salarisschaal 2 en 16 werknemers in salarisschaal 3. Verder trekt het bedrijf ieder jaar 12 nieuwe werknemers in salarisschaal 1 aan en geen nieuwe medewerkers in de andere salarisschalen. Wat is op de lange termijn het verwachte aantal werknemers in de drie verschillende salarisschalen bij het bedrijf?

Normering:

1a	b	c	d	2a	b	3a	b
1	2	2	2	2	2	2	2