

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tussentoets Wiskunde 2 (2DD50) op 15 december 2015, 16.00 – 17.30 uur.

1. Gegeven is de Markov keten $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, beginverdeling $a^{(0)} = (0, 0, 0, 1, 0)$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Is de Markov keten reducibel of irreducibel? En is de Markov periodiek of aperiodiek? Leg in beide gevallen uw antwoord duidelijk uit.
- b) Bepaal de stationaire verdeling van de Markov keten.
- c) Bepaal $a^{(3)}$, de transiënte verdeling van de Markov keten op tijdstip 3. (NOTA BENE: Het is NIET nodig om de matrix P^3 te berekenen!)
2. Beschouw de Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en beginverdeling $a^{(0)} = (1, 0, 0)$.

De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De kosten per periode zijn 40 euro in toestand 1, 80 euro in toestand 2 en 0 euro in toestand 3.

- a) Bepaal de totale verwachte kosten over de tijdspanne $\{0, 1, 2\}$.
- b) Bepaal de totale verwachte kosten over een oneindige horizon.
- c) Bepaal de lange-termijn verwachte kosten per periode.

3. In een bepaalde functie in een bedrijf kunnen werknemers zich in twee verschillende salarisschalen bevinden, genummerd 1 en 2. De ontwikkeling van de werknemers in deze functie binnen het bedrijf in opeenvolgende jaren kan beschreven worden met behulp van een discrete-tijd Markov keten met 3 toestanden en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbij corresponderen de toestanden 1 en 2 met de twee verschillende salarisschalen en toestand 3 correspondeert met de toestand waarbij de persoon het bedrijf verlaten heeft. Het bedrijf heeft aan het begin van 2015 16 werknemers in deze functie. Verder trekt het bedrijf aan het eind van ieder jaar 8 nieuwe werknemers in salarisschaal 1 en 8 nieuwe werknemers in salarisschaal 2 aan.

- a) Bereken het verwachte aantal werknemers in salarisschaal 1 en salarisschaal 2 aan het begin van 2016, 2017 en 2018 in de volgende 2 gevallen:
- De 16 werknemers zaten aan het begin van 2015 allen in salarisschaal 1;
 - De 16 werknemers zaten aan het begin van 2015 allen in salarisschaal 2.
- b) Bereken voor beide gevallen van onderdeel a) ook het verwachte aantal werknemers op de lange termijn in de twee verschillende salarisschalen bij het bedrijf?
- c) Wat is op de lange termijn de kans dat een willekeurige werknemer op het moment dat hij het bedrijf verlaat salarisschaal 2 bereikt heeft?

Normering:

1a	b	c	2a	b	c	3a	b	c
2	2	1	2	2	1	2	2	1