TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tussentoets Wiskunde 2 (2DD50) op 12 december 2013, 11.00 – 12.30 uur.

1. In een oven worden produkten in batches van 2 bewerkt. De bewerkingstijd van een batch in de oven is exact 2 minuten. Bij de oven arriveert elke minuut met kans 4/5 een produkt. Zo gauw als er 2 produkten bij de oven zijn worden ze in de oven gezet en wordt hun bewerking in de oven gestart.

   De situatie bij de oven kan beschreven worden door een discrete-tijd Markov keten met 5 toestanden. De toestand (i, j) van de Markov keten geeft enerzijds het aantal wachtende produkten voor de oven weer (i), en anderzijds de resterende bewerkingstijd van de batch in de oven (j), aan het begin van een minuut. De mogelijke toestanden van de Markov keten zijn $(0, 0), (1, 0), (0, 2), (0, 1)$ en $(1, 1)$. Merk op dat in de toestanden $(0, 0)$ en $(1, 0)$ de oven de desbetreffende minuut geen bewerking zal uitvoeren, terwijl in de toestanden $(0, 2), (0, 1)$ en $(1, 1)$ dat wel het geval is.

   a) Geef de overgangsmatrix van de discrete-tijd Markov keten.

   b) Laat zien dat de limietverdeling van de discrete tijd Markov keten wordt gegeven door

   $$\pi_{(0,0)} = 0.02,\ \pi_{(1,0)} = 0.18,\ \pi_{(0,2)} = 0.40,\ \pi_{(0,1)} = 0.08,\ \pi_{(1,1)} = 0.32.$$

   c) Bereken de doorzet van de oven (= het verwachte aantal produkten dat op de lange termijn per minuut uit de oven komt).

   d) Bereken het gemiddeld aantal produkten dat, op de lange termijn, in een willekeurige minuut in de oven zit.

   e) In de toekomst is men van plan om ook batches van 1 produkt in de oven te bewerken. Als de oven vrij komt of vrij is en er maar 1 produkt aanwezig is, wacht men niet op een tweede produkt, maar start men onmiddellijk de bewerking in de oven. Geef toestandsruimte en overgangsmatrix van de Markov keten in deze nieuwe situatie.

2. Beschouw de Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en beginverdeling $a^{(0)} = (1/2, 0, 1/2, 0)$.

   De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

   a) Bepaal de limietverdeling van de Markov keten.
   b) Wat is de verwachte tijd dat de Markov keten in de doorgangstoestanden verblijft?

3. Een bedrijf heeft een aantal machines in gebruik. Machines worden na iedere week dat ze werken gecontroleerd en indien nodig worden ze naar de revisie afdeling gestuurd. Na de controle aan het eind van de week wordt twintig procent van de machines naar de revisie afdeling gestuurd en de overige tachtig procent kan gewoon door blijven werken. Een revisie neemt maximaal twee weken in beslag. Echter, het is mogelijk dat de revisie al na een week succesvol is afgerond (dit is het geval bij veertig procent van de machines). Verder wordt bij twintig procent van de machines na één week revisie besloten dat verdere revisie geen zin meer heeft (deze machines kunnen in het vervolg nooit meer gebruikt worden). Alle machines die een tweede week van revisie nodig hebben werken na die tweede week weer.

   a) Modelleer de toestand van de machine als een Markov keten.
   b) Een werkende machine produceert 100 produkten per week. Hoeveel produkten worden gemiddeld op een machine geproduceerd voordat besloten wordt dat de machine nooit meer gebruikt kan worden?
   c) Hoeveel nieuwe machines moet het bedrijf iedere week aanschaffen wanneer het op de lange duur 100 werkende machines wil hebben?

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	3a	b	c
1	2	1	1	1	2	2	1	2	2