**TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN**
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tussentoets Wiskunde 2 (2DD50), 12 december 2013, 11.00-12.30 uur.

---

1. a)
$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Los het volgende stelsel vergelijkingen op:
$$\begin{aligned} \pi_{(0,0)} &= \tfrac{1}{5}\pi_{(0,0)} + \tfrac{1}{5}\pi_{(0,1)}, \\ \pi_{(1,0)} &= \tfrac{4}{5}\pi_{(0,0)} + \tfrac{1}{5}\pi_{(1,0)} + \tfrac{4}{5}\pi_{(0,1)} + \tfrac{1}{5}\pi_{(1,1)}, \\ \pi_{(0,2)} &= \tfrac{4}{5}\pi_{(1,0)} + \tfrac{4}{5}\pi_{(1,1)}, \\ \pi_{(0,1)} &= \tfrac{1}{5}\pi_{(0,2)}, \\ \pi_{(1.1)} &= \tfrac{4}{5}\pi_{(0,2)}. \end{aligned}$$
   Normalisatievergelijking: $\pi_{(0,0)} + \pi_{(1,0)} + \pi_{(0,2)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1.1)} = 1$.

   c) $2 \cdot \pi_{(0,2)} = 4/5$.

   d) $2 \cdot \left(\pi_{(0,2)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)}\right) = 8/5$.

   e) Toestandsruimte: $\{(0,0),(0,2),(0,1),(1,1)\}$
$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Eindklassen: $E_1 = \{2\}, E_2 = \{4\}$. Verder geldt
$$\begin{aligned} q_{1,E_1} &= \frac{1}{6}q_{1,E_1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}q_{3,E_1}, \\ q_{3,E_1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}q_{3,E_1}. \end{aligned}$$
   Hieruit volgt $q_{1,E_1} = \frac{3}{5}, \quad q_{3,E_1} = \frac{1}{2}$.
   De limietverdeling wordt $(0, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}) = (0, \frac{11}{20}, 0, \frac{9}{20})$.

   b) Met $A = \{2,4\}$ geldt
$$\begin{aligned} m_1(A) &= 1 + \frac{1}{6}m_1(A) + \frac{1}{3}m_3(A), \\ m_3(A) &= 1 + \frac{1}{3}m_3(A). \end{aligned}$$
   Hieruit volgt $m_1(A) = 1.8$ en $m_3(A) = 1.5$. De gevraagde tijd is: $\frac{1}{2}\cdot 1.8 + \frac{1}{2}\cdot 1.5 = 1.65$.

3. a) Toestandsruimte:{machine werkt, eerste week revisie, tweede week revisie, machine wordt nooit meer gebruikt}.

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Laat $\tilde{g}(i)$ de totale produktie zijn bij start in toestand $i$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \tilde{g}(1) &= 100 + 0.8 \cdot \tilde{g}(1) + 0.2 \cdot \tilde{g}(2) \\ \tilde{g}(2) &= 0.4 \cdot \tilde{g}(1) + 0.4 \cdot \tilde{g}(3) \\ \tilde{g}(3) &= \tilde{g}(1) \end{aligned}$$

Er volgt $0.04 \cdot \tilde{g}(1) = 100$. Het gevraagde antwoord is dus $\tilde{g}(1) = 2500$.

c) Gebruik $s = r + s \cdot Q$ met $r = (r_1, 0, 0)$ en $s_1 = 100$. De oplossing is $r_1 = 4$.
(Andere redenering: machine werkt gemiddeld 25 weken. Om 100 werkende machines te hebben moet je dus 4 nieuwe machines per week aanschaffen)