

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Faculteit Wiskunde en Informatica

Antwoorden Tussentoets Wiskunde 2 (2DD50), 15 december 2015, 16.00-17.30 uur.

1. a) De keten is irreducibel (je kan van iedere toestand in 1 of meer stappen naar iedere andere toestand) en periodiek (je kan alleen in even aantal stappen in toestand terugkeren).

b) Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned}\pi_1^* &= \frac{1}{2}\pi_2^* + \frac{1}{2}\pi_3^*, \\ \pi_2^* &= \frac{1}{2}\pi_1^* + \frac{1}{4}\pi_4^*, \\ \pi_3^* &= \frac{1}{2}\pi_1^* + \frac{1}{4}\pi_4^*, \\ \pi_4^* &= \frac{1}{2}\pi_2^* + \frac{1}{2}\pi_3^* + \pi_5^*, \\ \pi_5^* &= \frac{1}{2}\pi_4^*\end{aligned}$$

met normalisatie $\pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* + \pi_4^* + \pi_5^* = 1$. Dit geeft $\pi_1^* = \pi_2^* = \pi_3^* = \pi_5^* = \frac{1}{6}$ en $\pi_4^* = \frac{1}{3}$.

c) $a^{(3)} = (0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, 0, \frac{3}{8})$.

2. a)
$$M(2) = I + P + P^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Totale verwachte kosten over tijdspanne $\{0, 1, 2\}$: $\frac{7}{4} \cdot 40 + 1 \cdot 80 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 150$.

b)

$$\begin{aligned}\tilde{g}(1) &= 40 + \frac{1}{2}\tilde{g}(1) + \frac{1}{2}\tilde{g}(2), \\ \tilde{g}(2) &= 80 + \frac{1}{2}\tilde{g}(2).\end{aligned}$$

Hieruit volgt $\tilde{g}(2) = 160$ en $\tilde{g}(1) = 240$. Het antwoord is dus 240.

c) Limietverdeling $\pi = (0, 0, 1)$. Lange-termijn verwachte kosten per periode: 0.

3. a) Gebruik $s^{(n)} = r^{(n)} + s^{(n-1)} \cdot Q$ met $r^{(n)} = (8, 8)$. Dit geeft in het eerste geval, met $s^{(0)} = (16, 0)$, dat $s^{(1)} = (16, 12)$, $s^{(2)} = (16, 18)$ en $s^{(3)} = (16, 21)$. En in het tweede geval, met $s^{(0)} = (0, 16)$, dat $s^{(1)} = (8, 16)$, $s^{(2)} = (12, 18)$ en $s^{(3)} = (14, 20)$.

b) Los op $s = r + s \cdot Q$ met $r = (8, 8)$. Dit geeft in beide gevallen $s_1 = 16$ en $s_2 = 24$.

c) Er vertrekken per jaar gemiddeld 4 werknemers uit salarisschaal 1 en 12 werknemers uit salarisschaal 2. De gevraagde kans is dus $12/16 = 3/4$.