Kansrekening en stochastische processen *2DE18*

Docent : *Jacques Resing*
E-mail: resing@win.tue.nl

Gezamenlijke cumulatieve verdelingsfunctie

De gezamenlijke cumulatieve verdelingsfunctie (joint cumulative distribution or joint CDF) van de stochastische variabelen X en Y is:

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

Gezamenlijke verdelingsfunctie

De gezamenlijke verdelingsfunctie (joint probability mass function or joint PMF) van de discrete stochastische variabelen X en Y is:

$$P_{X,Y}(x, y) = P[X = x, Y = y]$$

We definiëren het bereik (range) van het paar stochastische variabelen X en Y is:

$$S_{X,Y} = \{(x, y) \mid P[X = x, Y = y] > 0\}.$$

Marginale kansverdeling

X en Y zijn discrete stochastische variabelen met gezamenlijke kansverdeling $P_{X,Y}(x, y)$. We hebben:

$$P_X(x) = \sum_{y \in S_y} P_{X,Y}(x, y), \quad P_Y(y) = \sum_{x \in S_x} P_{X,Y}(x, y)$$

Dit wordt de marginale kansverdeling (marginal PMF) genoemd.

Gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

De gezamenlijke kansdichtheidsfunctie (joint probability density function or joint PDF) $f_{X,Y}$ van de stochastische variabelen X en Y is zodanig dat:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)\, \mathrm{d}v \mathrm{d}u$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Marginale kansdichtheid

Gegeven zijn stochastische variabelen X en Y met gezamenlijke kansdichtheid $f_{X,Y}(x, y)$. We hebben:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x.$$

Dit wordt de marginale kansdichtheid (marginal PDF) genoemd.

Functies van twee stochastische variabelen

Voor discrete stochastische variabelen X en Y, heeft de afgeleide stochastische variabele $W = g(X, Y)$ een kansverdeling:

$$P_W(w) = \sum_{\substack{(x,y) \\ g(x,y)=w}} P_{X,Y}(x, y)$$

Functies van twee stochastische variabelen

Voor continue stochastische variabelen X en Y, heeft de afgeleide stochastische variabele $W = g(X, Y)$ een cumulatieve kansverdeling:

$$F_W(w) = P[W \leq w] = \iint_{g(x,y) \leq w} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Voor $W = \max(X, Y)$ hebben we:

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{w} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Voorbeeld

Gegeven stochasten met een gezamenlijke kansdichtheid:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)} & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bepaal de kansdichtheid van $W = Y/X$.

Verwachting

Voor stochastische variabelen X en Y, is de verwachting (expectation) van $W = g(X, Y)$:

Discreet: $$E[W] = \sum_{x \in S_x} \sum_{y \in S_y} g(x, y) P_{X,Y}(x, y)$$

Continu: $$E[W] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

We hebben:

$$E[g_1(X,Y) + \cdots + g_n(X,Y)] = E[g_1(X,Y)] + \cdots + E[g_n(X,Y)]$$

In het bijzonder:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

De variantie van de som van twee stochastische variabelen is:

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

De covariantie (covariance) van de stochastische variabelen X en Y is:

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

De correlatie (correlation) van de stochastische variabelen X en Y is:

$$r_{X,Y} = E[XY]$$

We hebben:

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = r_{X,Y} - \mu_X \mu_Y$
- $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X, Y]$
- Als $X = Y$,
  - $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ en
  - $r_{X,Y} = E[X^2] = E[Y^2]$.

Orthogonale stochastische variabelen

We noemen de stochastische variabelen X en Y orthogonaal (orthogonal) als $r_{X,Y} = 0$.

Ongecorreleerde stochastische variabelen

We noemen de stochastische variabelen X en Y ongecorreleerd (uncorrelated) als $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

Correlatiecoëfficiënt

De correlatiecoëfficiënt (correlation coefficient) van twee stochastische variabelen X en Y is:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

We hebben $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

Stel dat X en Y stochastische variabelen zijn zodanig dat $Y = aX + b$. Dan:

$$\rho_{X,Y} = \begin{cases} -1 & \text{als } a < 0 \\ 0 & \text{als } a = 0 \\ 1 & \text{als } a > 0 \end{cases}$$

Voor discrete stochastische variabelen X en Y en een gebeurtenis B met $P[B] > 0$, is de conditionele gezamenlijke kansverdeling (conditional joint PMF) van X en Y gegeven B gelijk aan:

$$P_{X,Y|B}(x, y) = P[X = x, Y = y|B]$$

We hebben:

$$P_{X,Y|B}(x, y) = \begin{cases} \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P[B]} & \text{als } (x, y) \in B \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Voor stochastische variabelen X en Y en een gebeurtenis B met $P[B] > 0$, is de conditionele gezamenlijke kansdichtheid (conditional joint PDF) van X en Y gegeven B gelijk aan:

$$f_{X,Y|B}(x, y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{P[B]} & \text{als } (x, y) \in B \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Voorbeeld

Gegeven stochasten met een gezamenlijke kansdichtheid:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{15} & 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bepaal de conditionele kansdichtheid van X en Y gegeven

$$B = \{X + Y \geq 4\}$$

Voor stochastische variabelen X en Y en een gebeurtenis B met $P[B] > 0$, is de conditionele verwachting (conditional expectation) van $W = g(X, Y)$ gegeven B:

Discreet: $$E[W|B] = \sum_{x \in S_x} \sum_{y \in S_y} g(x, y) P_{X,Y|B}(x, y)$$

Continu: $$E[W|B] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y|B}(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Voor stochastische variabelen X en Y en een gebeurtenis B met $P[B] > 0$, is de conditionele variantie (conditional variance) van $W = g(X, Y)$ gegeven B:

$$\mathrm{Var}[W|B] = E\left[(W - \mu_{W|B})^2 \mid B\right]$$

We hebben:

$$\mathrm{Var}[W|B] = E[W^2 \mid B] - \mu_{W|B}^2$$

Voorbeeld

Gegeven stochasten met een gezamenlijke kansdichtheid:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{15} & 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bepaal de conditionele verwachting en variantie van $W = X + Y$ gegeven

$$B = \{X + Y \geq 4\}$$

Voor discrete stochastische variabelen X en Y en een gebeurtenis $Y = y$ met $P_Y(y) > 0$, is de conditionele kansverdeling (conditional PMF) van X gegeven $Y = y$:

$$P_{X|Y}(x|y) = P[X = x|Y = y]$$

We hebben:

$$P_{X,Y}(x, y) = P_{X|Y}(x|y)P_Y(y) = P_{Y|X}(y|x)P_X(x).$$

X en Y zijn stochastische variabelen. Voor elke $y \in S_y$, is de conditionele verwachting (conditional expectation) van $g(X, Y)$ gegeven $Y = y$ gelijk aan:

$$E[g(X, Y)|Y = y] = \sum_{x \in S_x} g(x, y) P_{X|Y}(x|y)$$

Voor y zodanig dat $f_Y(y) > 0$, is de conditionele kansdichtheid (conditional PDF) van X gegeven $Y = y$ gelijk aan:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

We hebben:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x).$$

Voorbeeld

Gegeven stochasten met een gezamenlijke kansdichtheid:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bepaal de conditionele kansdichtheid van X gegeven Y.

Voor continue stochastische variabelen X en Y en een gebeurtenis $Y = y$ met $f_Y(y) > 0$, is de conditionele verwachting (conditional expectation) van $g(X, Y)$ gegeven $Y = y$ gelijk aan:

$$E[g(X, Y)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$$

De conditionele verwachting $E[X|Y]$ is een functie van een stochastische variabele Y zodanig dat als de realisatie van de stochast Y de waarde y heeft dan is de realisatie van de stochast $E[X|Y]$ gelijk aan $E[X|Y = y]$.
We hebben:

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

$$E[E[g(X)|Y]] = E[g(X)]$$

Stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk (independent) dan en slechts dan als:

Discreet: $P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$

Continu: $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

Voorbeeld

Gegeven stochasten met een gezamenlijke kansdichtheid:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 24uv & u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Zijn U en V onafhankelijk?

Voor onafhankelijke stochastische variabelen X en Y:

- $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$
- $r_{X,Y} = E[XY] = E[X]E[Y]$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho_{X,Y} = 0$
- $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$
- $E[X|Y = y] = E[X]$ voor alle $y \in S_Y$
- $E[Y|X = x] = E[Y]$ voor alle $x \in S_X$

Stochastische variabelen X en Y hebben een bivariate Gaussische kansdichtheid (bivariate Gaussian PSD) met parameters μ_1, σ_1, μ_2, σ_2, en ρ als:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}{2(1-\rho^2)} \right]$$

met μ_1 en μ_2 willekeurige getallen, $\sigma_1 > 0$ en $\sigma_2 > 0$ en $-1 < \rho < 1$.

We hebben:

- $E[X] = \mu_1$
- $\mathrm{Var}[X] = \sigma_1^2$
- $E[Y] = \mu_2$
- $\mathrm{Var}[Y] = \sigma_2^2$
- $\rho_{X,Y} = \rho$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$
- $r_{X,Y} = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2$

Als X en Y bivariate Gaussische stochastische variabelen zijn dan is X een Guassische (μ_1, σ_1) stochastische variabele en Y een Guassische (μ_2, σ_2) stochastische variabele:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-(x-\mu_1)^2/(2\sigma_1^2)}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-(y-\mu_2)^2/(2\sigma_2^2)}$$

Als X en Y bivariate Gaussische stochastische variabelen zijn dan is de conditionele kansdichtheid van X gegeven Y gelijk aan:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_1^2}} e^{-(x-\tilde{\mu}_1(y))^2/(2\tilde{\sigma}_1^2)}$$

met

$$\tilde{\mu}_1(y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \quad \tilde{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$$

Bivariate Gaussische stochastische variabelen X en Y zijn ongecorreleerd dan en slechts dan als X en Y onafhankelijk zijn.