Kansrekening en stochastische processen *2S610*

Docent : *Jacques Resing*
E-mail: j.a.c.resing@tue.nl

http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2S610

Continue stochastische variabele

We schieten een pijl op een schietschijf. X is de afstand van de pijl tot het centrum.
Een willekeurig getal tussen 0 en 1.

De cumulatieve verdelingsfunctie van een stochastische variabele is

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

Voor een stochastische variabele X geldt:

- $F_X(-\infty) = 0$ en $F_X(\infty) = 1$.
- Voor elke $x' \geq x$ geldt $F_X(x') \geq F_X(x)$.
- $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P[x_1 < X \leq x_2]$.

X is een continue stochastische variabele als de cumulatieve verdelingsfunctie continu is.

X neemt een willekeurige waarde aan op het interval $[0, 1]$ met alle mogelijke uitkomsten even waarschijnlijk.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$$

Kansdichtheid

De kansdichtheid van een continue stochastische variabele is:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$$

Voor een continue stochastische variabele X met kansdichtheid f_X:

- $f_X(x) \geq 0$ voor alle x.
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$

$$P[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

We doen drie trekkingen na elkaar waarbij we een willekeurige waarde aannemen tussen 0 en 1 met alle uitkomsten even waarschijnlijk. Zij Y het maximum van de drie uitkomsten.
We hebben:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y < 0 \\ y^3 & \text{als } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{als } y > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y < 0 \\ 3y^2 & \text{als } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{als } y > 1 \end{cases}$$

De verwachting van een continue stochast X is

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zij X een trekking waarbij we een willekeurige waarde aannemen tussen 0 en 1 met alle uitkomsten even waarschijnlijk.
We doen drie trekkingen na elkaar van X. Zij Y het maximum van de drie uitkomsten.
We hebben:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 1 & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{als } x > 1 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{als } y < 0 \\ 3y^2 & \text{als } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{als } y > 1 \end{cases}$$

$$E[X] = \tfrac{1}{2} \qquad E[Y] = \tfrac{3}{4}$$

De verwachting van een functie $g(X)$ van een stochastische variabele X is:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Voor een stochastische variabele:

- $E[X - \mu_X] = 0$
- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \mu_X^2$
- $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$

X is een uniform(a, b) verdeelde stochastische variabele als:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{als } a \leq x < b \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{als } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{als } x > b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

X is een exponentiële (λ) verdeelde stochastische variabele als:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Als X een exponentiële (λ) verdeelde stochastische variabele is dan is

$$K = \lceil X \rceil$$

een geometrische(p) verdeelde stochastische variabele met $p = 1 - e^{-\lambda}$.

X is een Erlang (n, λ) verdeelde stochastische variabele als:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{n}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{n}{\lambda^2}$$

X is een Gaussisch (μ, σ) verdeelde stochastische variabele als:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$E[X] = \mu \qquad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2$$

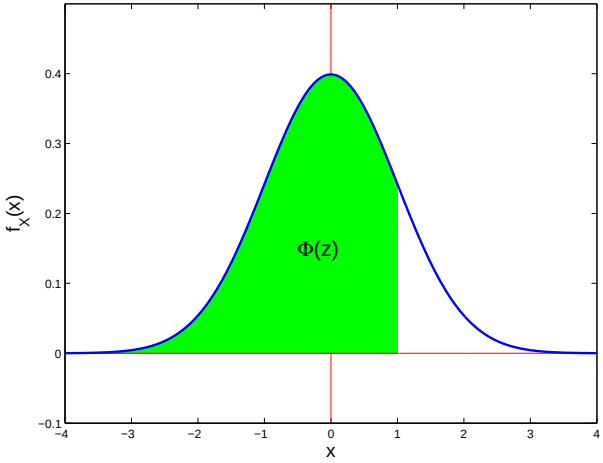
De standaard normaal verdeelde stochastische variabele Z is de Gaussisch $(0, 1)$ verdeelde stochastische variabele.

De cumulatieve verdelingsfunctie van de standaard normaal verdeelde stochastische variabele is:

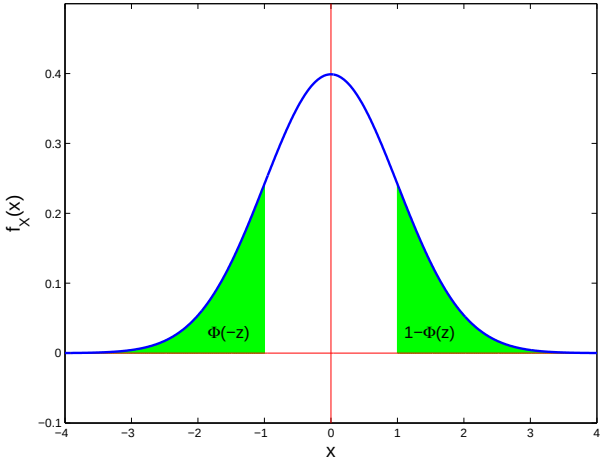
$$\Phi(z) = \mathrm{erf}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

Als X een Gaussisch (μ, σ) verdeelde stochastische variabele dan geldt:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$


0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
$f_X(x)$
Φ(z)
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



The standaard normale complementaire cumulatieve verdelingsfunctie is:

$$Q(z) = P[Z > z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = 1 - \Phi(z)$$

The delta functie

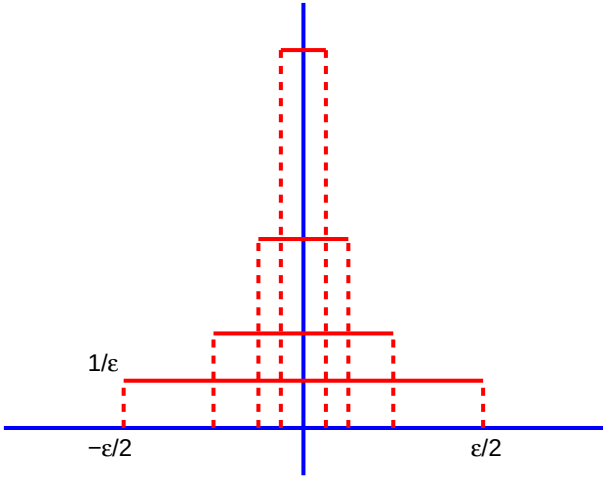
Zij

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{als } \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

De eenheids impulsfunctie is:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(x)$$

Delta functie



De interpretatie:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{als } x = 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

werkt niet want hoe moeten we hier mee rekenen?

Voor elke continue functie $g(x)$ geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = g(x_0)$$

Dit wordt de zeefeigenschap genoemd.

De eenheids stapfunctie wordt gedefinieerd als:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 1 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

We hebben:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(v)\mathrm{d}v = u(x)$$

Voor een discrete stochastische variabele met bereik $S_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ geldt:

$$F_X(x) = \sum_{x_i \in S_X} P_X(x_i) u(x - x_i)$$

en

$$f_X(x) = \sum_{x_i \in S_X} P_X(x_i) \delta(x - x_i)$$

Gemengde stochastische variabelen

X wordt een gemengde stochastische variabele genoemd als $f_X(x)$ zowel impulsen als eindige waarden ongelijk aan nul aanneemt.

Afgeleide stochastische variabelen

Als we een afgeleide stochastische variabele

$$Y = g(X)$$

hebben dan willen we de kansverdeling en de kansdichtheid kunnen bepalen gegeven de verdeling van X.
We doen dit meestal in twee stappen:

- Bepaal de cumulatieve kansverdeling $F_Y(y) = P[Y \leq y]$.
- Bereken de kansdichtheid $f_Y(y)$ via de afgeleide $f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}$.

Zij X een uniform$(0, 1)$ verdeelde stochastische variabele.
Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie en de kansdichtheid van de stochasten:

- $Y_1 = 100X$,
- $Y_2 = X^2$,
- $Y_3 = X^3$.

Zij $Y = aX$ met $a > 0$, dan heeft Y als kansverdelingsfunctie en kansdichtheid respectievelijk:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{a}\right), \qquad f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

$Y = aX$ met $a > 0$:

- Als X uniform(b, c) is dan is Y uniform(ab, ac),
- Als X exponentieel(λ) is dan is Y exponentieel(λ/a),
- Als X Erlang(n, λ) is dan is Y Erlang$(n, \lambda/a)$,
- Als X Gaussisch(μ, λ) is dan is Y Gaussisch$(a\mu, a\sigma)$,

Zij $Y = X + b$, dan heeft Y als kansverdelingsfunctie en kansdichtheid respectievelijk:

$$F_Y(y) = F_X(y - b), \qquad f_Y(y) = f_X(y - b)$$

Zij U een uniforme$(0, 1)$ verdeelde stochastische variabele. Zij $F(x)$ een cumulatieve verdelingsfunctie met een inverse F^{-1} gedefinieerd op $[0, 1]$. Dan heeft de stochastische variabele $X = F^{-1}(U)$ een kansverdelingsfunctie $F_X(x) = F(x)$.

Conditionele verdelingsfunctie gegeven een gebeurtenis

Voor een stochastische variabele X met kansdichtheid $f_X(x)$ en een gebeurtenis $B \subset S_X$ met $P[B] > 0$ de conditionele kansdichtheid gegeven B is:

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P[B]} & \text{als } x \in B \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Een stochastische variabele X resulterend van een experiment en een partitie $B_1, B_2, \ldots, B_m$ van de uitkomstenruimte met conditionele kansdichtheden $f_{X|B_i}(x)$, heeft een kansdichtheid:

$$f_X(x) = \sum_i f_{X|B_i}(x) P[B_i]$$

Conditionele verwachting gegeven een gebeurtenis

Gegeven dat $x \in B$ dan is de conditionele verwachting van X gelijk aan:

$$E[X|B] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|B}(x)\,\mathrm{d}x.$$