NETWERKEN VAN WACHTRIJEN

Tot nog toe keken we naar wachtrijmodellen bestaande uit 1 station.

- Klanten komen aan bij het station,...
- staan (al dan niet) een tijdje in de wachtrij,....
- worden bediend door een bediende,....
- en verlaten het station weer.

In veel toepassingen bezoeken klanten niet één maar meerdere stations.

- Patiënten in een ziekenhuis;
- Produkten in een produktielijn;
- Berichten over het Internet;

In zo'n geval hebben we te maken met een *Netwerk van wachtrijen*.

JACKSON NETWERK

Modelbeschrijving

- Het netwerk bestaat uit N stations.
- Station i heeft s_i bediendes, $i = 1, 2, \ldots, N$.
- De wachtruimtes bij alle stations hebben onbegrensde capaciteit.
- Het aankomstproces van klanten *van buitenaf* bij station i is een Poisson proces met intensiteit λ_i.
- Bedieningstijden van klanten bij station i zijn identiek, exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van $1/\mu_i$.
- Een klant die station i bezocht heeft gaat, onafhankelijk van het verleden, met kans $p_{i,j}$ naar station j. Met kans r_i verlaat hij het netwerk.

Natuurlijk moet voor alle i gelden

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} + r_i = 1.$$

De kansen $p_{i,j}$ worden wel *routeringskansen* genoemd en de matrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

wordt *routeringsmatrix* genoemd.

Merk op dat de matrix P een sub-stochastische matrix is
(alle elementen ≥ 0 en alle rijsommen ≤ 1).

Voorbeeld: Tandem queue (flow line)

- Klanten moeten achtereenvolgens in vier verschillende stations bediend worden.
- Station 1 (respectievelijk 2,3 en 4) heeft 2 (respectievelijk 3, 1 en 4) bediendes.
- Het aankomstproces van klanten van buitenaf bij station 1 is een Poisson proces met een intensiteit van 10 klanten per uur.
- Bedieningstijden van klanten bij station 1 (respectievelijk 2,3 en 4) zijn exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van 10 (respectievelijk 15, 5 en 20) minuten.

Voorbeeld: Tandem queue (vervolg)

We hebben hier (tijdseenheid = 1 uur):

$$N = 4,$$

$$\begin{gathered} s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 4, \\ \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \\ \mu_1 = 6, \quad \mu_2 = 4, \quad \mu_3 = 12, \quad \mu_4 = 3, \\ r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 = 1, \end{gathered}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VERKEERSVERGELIJKINGEN

Noteer met a_j de totale aankomstintensiteit van klanten bij station j. De onbekenden $a_j, j = 1, \ldots, N$ kunnen berekend worden met behulp van het stelsel *verkeersvergelijkingen*

$$a_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} a_i p_{i,j}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Met de notatie

$$a = [a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_N] \quad \lambda = [\lambda_1 \; \lambda_2 \; \ldots \; \lambda_N]$$

kan dit ook geschreven worden als

$$a = \lambda + aP$$

en dus $a(I - P) = \lambda$, oftewel (aanname: $(I-P)^{-1}$ bestaat)

$$a = \lambda(I - P)^{-1}.$$

Voorbeeld: Tandem queue (vervolg)

We hebben hier $\lambda = [10\ 0\ 0\ 0]$,

$$I - P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(I - P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en dus

$$a = \lambda(I - P)^{-1} = [10\ 10\ 10\ 10].$$

(De verkeersvergelijkingen zijn hier $a_1 = 10,\ a_2 = a_1,\ a_3 = a_2,\ a_4 = a_3$).

STABILITEITSVOORWAARDE

Aangezien in een Jackson netwerk alle stations een onbegrensde wachtruimte hebben, moet er natuurlijk weer aan een stabiliteitsvoorwaarde voldaan worden om te voorkomen dat het aantal klanten in het netwerk op den lange duur steeds groter worden.

De stabiliteitsvoorwaarde luidt dat voor alle stations $i = 1, \dots, N$ moet gelden

$$a_i < s_i \mu_i,$$

d.w.z. bij ieder station i moet de aankomstintensiteit van klanten kleiner zijn dan de bedieningsintensiteit van klanten.

In het vervolg gaan we er van uit dat aan deze voorwaarde voldaan is.

LIMIETGEDRAG VAN JACKSON NETWERK

Gegeven een Jackson netwerk waarin aan de stabiliteitsvoorwaarde is voldaan ($a_i < s_i\mu_i$ voor alle i). De toestand van het netwerk wordt beschreven door de vector

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \ldots, X_N(t)]$$

waarbij $X_i(t)$ het aantal klanten op tijdstip t in station i voorstelt. De limietverdeling van het proces $X(t)$ noteren we met

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_N) = \lim_{t\to\infty} P(X_1(t) = n_1, X_2(t) = n_2, \ldots, X_N(t) = n_N).$$

Stelling:
De limietverdeling van een Jackson netwerk wordt gegeven door

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_N) = p_1(n_1)p_2(n_2)\cdots p_N(n_N),$$

waarbij $p_i(n_i)$ de kans is dat er op de lange termijn n_i klanten zijn in een $M/M/s_i$ model met aankomstintensiteit a_i en bedieningsintensiteit μ_i.

Merk op:

- Station i gedraagt zich als een $M/M/s_i$ model met aankomstintensiteit a_i en bedieningsintensiteit μ_i.
- In de limietverdeling geldt dat het aantal klanten in de verschillende stations onafhankelijk van elkaar zijn. (De gemeenschappelijk verdeling is het produkt van de marginale verdelingen)

Gevolg is dat we voor Jackson netwerken prestatiematen kunnen uitrekenen als

- L, het gemiddeld aantal klanten in het systeem,
- W, de gemiddelde tijd dat klanten in het systeem.

Dit zullen we illustreren voor een Jackson netwerk dat alleen uit single-server stations bestaat.

Jackson netwerk bestaande uit single-server station

Laat λ_i de aankomstintensiteit van klanten bij station i van buiten, a_i de totale aankomstintensiteit (van binnen en buiten) van klanten bij station i en μ_i de bedieningsintensiteit in station i. Laat verder $\rho_i = (a_i/\mu_i) < 1$.

Vragen:

- Wat is op de lange duur het verwachte totaal aantal klanten in het netwerk?
- Wat is op de lange duur de kans dat alle stations tegelijk leeg zijn?
- Wat is op de lange duur de verwachte tijd dat klanten in het systeem?

GESLOTEN NETWERKEN VAN WACHTRIJEN

In het voorgaande hebben we gekeken naar een model waarbij klanten van buitenaf het netwerk inkomen, een (stochastisch) aantal keren van het ene station naar het andere station springen en vervolgens het netwerk weer verlaten. Dit soort netwerken staat bekend onder de naam *open netwerken*. Kenmerkend voor een open netwerk is dat het aantal klanten dat tegelijkertijd in het netwerk aanwezig is *fluctueert in de tijd*.

In het vervolg zullen we kijken naar netwerken waarbij het aantal klanten dat tegelijkertijd in het netwerk aanwezig is *constant is in de tijd*. Dit soort netwerken staat bekend onder de naam *gesloten netwerken*. In toepassingen betekent dit vaak dat als een klant het netwerk verlaat, hij onmiddellijk vervangen wordt door een andere.

Toepassingen van gesloten netwerken zijn:

- Systemen waarbij produkten op pallets door het netwerk gaan;
- Systemen waarbij aan werklastbeheersing gedaan wordt;

GESLOTEN NETWERK MET 2 SINGLE-SERVER STATIONS

Modelbeschrijving

- Het netwerk bestaat uit 2 single-server stations.
- Bedieningstijden van klanten bij station i zijn identiek, exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van $1/\mu_i$.
- Een klant die station i bezocht heeft gaat, onafhankelijk van het verleden, met kans $p_{i,j}$ naar station j.
- Het totaal aantal klanten in het systeem is constant en gelijk aan K.

De routeringsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

is een stochastische matrix (alle elementen ≥ 0 en alle rijsommen $= 1$). Het is niet mogelijk dat klanten het systeem verlaten.

Opmerkingen

1. Aangezien het aantal klanten in het systeem *constant* is (en dus niet naar oneindig kan weglopen), is het systeem altijd stabiel.
2. Het proces $(X_1(t), X_2(t))$, waarbij $X_i(t)$ het aantal klanten op tijdstip t in station i is, is een continue-tijd Markov keten.
3. De toestandsruimte van de continue-tijd Markov keten is $S = \{(k_1, k_2) : k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = K\}$.

De limietverdeling van het proces $(X_1(t), X_2(t))$ noteren we met

$$p(k_1, k_2) = \lim_{t \to \infty} P(X_1(t) = k_1, X_2(t) = k_2).$$

De volgende stelling vertelt ons hoe deze limietverdeling er uit ziet.

Stelling:
De limietverdeling van de CTMC $(X_1(t), X_2(t))$ wordt, voor $(k_1, k_2) \in S$, gegeven door

$$p(k_1, k_2) = C \cdot \left(\frac{v_1}{\mu_1}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{v_2}{\mu_2}\right)^{k_2}.$$

Hierbij is

- C: normaliseringsconstante die zorgt dat som van de kansen is 1.
- v_1 en v_2: *relatieve bezoekfrequenties* van station 1 en station 2.
  Relatieve bezoekfrequenties $v = (v_1, v_2)$ zijn niet-unieke oplossingen van de verkeersvergelijkingen

  $$v = vP.$$

  Bijvoorbeeld kunnen we kiezen $v_1 = 1/p_{1,2}$ en $v_2 = 1/p_{2,1}$.

Bewijs van de stelling gaat via de snedevergelijkingen.

Wanneer we de limietverdeling kennen, kunnen we weer allerlei prestatiematen van het netwerk uitrekenen zoals:

- de *marginale kansverdeling* van het aantal klanten in een station.
- de *bezettingsgraad* van een bediende in een station.
- de *doorzet* van een station.
- het *gemiddeld aantal klanten* in een station.
- de *gemiddelde tijd* dat klanten in een station.

Als het gesloten netwerk bovendien een systeem modelleert waarbij klanten, als ze het systeem verlaten, direct vervangen worden door een nieuwe klant, kunnen we ook prestatiematen uitrekenen als:

- de *doorzet* van het systeem.
- de *gemiddelde tijd* dat klanten in het systeem.

Voorbeeld:

- Jobs eerst langs station 1, dan station 2, dan weg.
- Na bezoek aan station 1 moet job met kans 1/2 opnieuw langs station 1.
- Na bezoek aan station 2 moet job met kans 1/3 opnieuw langs station 2.
- Vier jobs tegelijk in het systeem. Telkens als er een job bij station 2 het systeem verlaat dan wordt er een nieuwe job in het systeem toegelaten bij station 1.
- Beide stations zijn single-server stations met exponentiële bedieningstijden met een gemiddelde van 3, respectievelijk 4, minuten.

In dit geval geldt

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad v_1 : v_2 \quad \text{als} \quad 4:3.$$

Voor de limietverdeling vinden we:

$$p(0,4) = p(1,3) = p(2,2) = p(3,1) = p(4,0) = 1/5.$$

Overige prestatiematen:

- bezettingsgraad van de bediendes in station 1 en 2: 4/5;
- doorzet van station 1: 16 bewerkingen per uur;
- doorzet van station 2: 12 bewerkingen per uur;
- gemiddelde aantal jobs in station 1 en station 2: 2;
- gemiddelde tijd dat job per bewerking in station 1: 7.5 minuten;
- gemiddelde tijd dat job per bewerking in station 2: 10 minuten;
- doorzet van het systeem: 8 jobs per uur;
- gemiddelde tijd dat job in systeem: 30 minuten;

Gesloten netwerk met N single-server station

De resultaten voor het model met 2 single-server stations kunnen uitgebreid worden naar het model met meerdere single-server stations.

Modelbeschrijving

- Het netwerk bestaat uit N single-server stations.
- Bedieningstijden van klanten bij station i zijn identiek, exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van $1/\mu_i$.
- Een klant die station i bezocht heeft gaat, onafhankelijk van het verleden, met kans $p_{i,j}$ naar station j.
- Het totaal aantal klanten in het systeem is constant en gelijk aan K.

Het proces $(X_1(t), \dots, X_N(t))$, waarbij $X_i(t)$ het aantal klanten op tijdstip t in station i is, is een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte

$$S = \{(k_1, \dots, k_N) : k_1 \geq 0, \dots, k_N \geq 0, k_1 + \cdots + k_N = K\}.$$

Stelling:

De limietverdeling van de CTMC $(X_1(t), \ldots, X_N(t))$ wordt, voor $(k_1, \ldots, k_N) \in S$, gegeven door

$$p(k_1, \ldots, k_N) = C \cdot \left(\frac{v_1}{\mu_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{v_N}{\mu_N}\right)^{k_N}.$$

Hierbij is

- C: normaliseringsconstante die zorgt dat som van de kansen is 1.
- $v_1, \ldots, v_N$: *relatieve bezoekfrequenties* van station 1 tot en met station N. Relatieve bezoekfrequenties $v = (v_1, \ldots, v_N)$ zijn niet-unieke oplossingen van de verkeersvergelijkingen

$$v = vP.$$