MARKOV KETENS

Definitie van Markov keten:

Een stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ met toestandsruimte S heet een *discrete-tijd Markov keten (DTMC)* als voor alle i en j in S geldt

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

In woorden:

Gegeven het *heden* X_n en het *verleden* $X_0, \ldots, X_{n-1}$ van het proces hangt de *toekomst* X_{n+1} alleen af van het heden en niet van het verleden.

De conditionele kansen

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

heten *1-staps overgangskansen*.

In de meeste toepassingen geldt *voor alle* n:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{i,j},$$

i.e., de 1-staps overgangskansen zijn *tijdhomogeen* (ze hangen niet van n af).

In het vervolg kijken we alleen naar tijdhomogene Markov ketens!

De $N \times N$ matrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

heet de *1-staps overgangsmatrix* en speelt een belangrijke rol bij de analyse van Markov ketens.

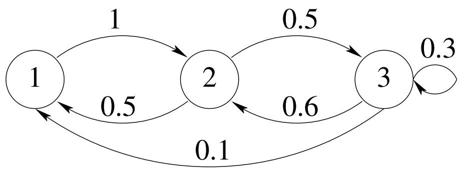
Visualisatie van Markov keten:

We visualiseren Markov ketens met behulp van een *transitiediagram*.

Transitiediagram:
Een transitiediagram is een *gerichte graaf* met N knopen.
De knopen in de graaf stellen de toestanden van de Markov keten weer.
We tekenen een pijl van knoop i naar knoop j wanneer $p_{i,j} > 0$.
Bij de pijl zetten we de waarde $p_{i.j}$.

Voorbeeld:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$



TRANSIËNTE VERDELINGEN

Transiënte verdeling: $P(X_n = j),\ j \in S,$ voor zekere $n \geq 0$.

Limiet verdeling: $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j),\ j \in S$.

Transiënte verdelingen kunnen berekend worden m.b.v.

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

De kansen $P(X_n = j \mid X_0 = i)$ heten n-*staps overgangskansen*.

Vraag: Hoe berekenen we de n-staps overgangskansen?

Notatie:

$$p_{i,j}^{(n)} := P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

Dan geldt voor alle i en j:

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(2)} &= P(X_2 = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_2 = j,\ X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = j \mid X_1 = k,\ X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot P(X_2 = j \mid X_1 = k) \\
&= \sum_{k \in S} p_{i,k} \cdot p_{k,j}.
\end{aligned}$$

Conclusie: Voor de 2-staps overgangsmatrix $P^{(2)}$ geldt

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

Evenzo kan je bewijzen dat voor de n-staps overgangsmatrix $P^{(n)}$ geldt

$$P^{(n)} = P^n$$

In woorden:

De n-staps overgangsmatrix $P^{(n)}$ is gelijk aan n-de macht van de matrix P.

Opmerking:

Het gebruik van Matlab kan erg handig zijn bij het berekenen van hogere machten van de matrix P.

Noteer met $a^{(n)}$ de transiënte verdeling van de Markov keten op tijdstip n, d.w.z.

$$a^{(n)} = [a_1^{(n)}, \dots, a_N^{(n)}] = [P(X_n = 1), \dots, P(X_n = N)]$$

dan volgt uit de al eerder getoonde formule

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

dat

$$a^{(n)} = a^{(0)} \cdot P^n$$

Conclusie:

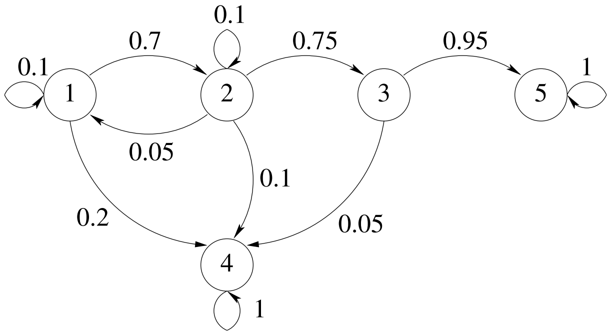
Als je voor een Markov keten de beginverdeling $a^{(0)}$
en de overgangsmatrix P kent, kan je
voor elke n de transiënte verdeling $a^{(n)}$ uitrekenen.

Voorbeeld

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0.75 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transitiediagram



In ons voorbeeld geldt, uitgaande van $a^{(0)} = [1, 0, 0, 0, 0]$, dat

$$\begin{aligned}
a^{(1)} &= a^{(0)} \cdot P = [0.1, 0.7, 0, 0.2, 0], \\
a^{(2)} &= a^{(0)} \cdot P^2 = [0.045, 0.140, 0.525, 0.290, 0], \\
a^{(3)} &= a^{(0)} \cdot P^3 = [0.0115, 0.0455, 0.1050, 0.3393, 0.4987], \\
a^{(4)} &= a^{(0)} \cdot P^4 = [0.0034, 0.0126, 0.0341, 0.3514, 0.5985], \\
a^{(5)} &= a^{(0)} \cdot P^5 = [0.0010, 0.0037, 0.0095, 0.3550, 0.6308], \\
a^{(10)} &= a^{(0)} \cdot P^{10} = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.3564, 0.6435], \\
a^{(100)} &= a^{(0)} \cdot P^{100} = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.3564, 0.6435],
\end{aligned}$$

Vermoedelijk zal wel gelden

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.3564, 0.6435]$$

Hier komen we later op terug!

Example 2.8: Buffer in communicatienetwerk:

Switch in communicatienetwerk met N inkomende en 1 uitgaande lijn.

Tijd is ingedeeld in tijdsloten. In een tijdslot kan precies één pakket over iedere inkomende en de uitgaande lijn verstuurd worden.

In knooppunt bevindt zich een buffer ter grootte K (om te voorkomen dat datapakketten verloren gaan)

Aantal aankomende pakketten in tijdslot n: A_n

Aanname: $\{A_n, n \geq 0\}$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld.

$$P(A_n = k) = a_k$$

(Bijvoorbeeld $a_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, d.w.z. A_n is binomiaal verdeeld)

Laat X_n het aantal pakketten in de buffer aan het eind van tijdslot n zijn.

Het stochastisch proces $\{X_n, n \geq 0\}$ is een Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, \ldots K\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{K-1} & b_K \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{K-1} & b_K \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{K-2} & b_{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & b_1 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$b_j = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} a_k.$$

Example 2.12 (vervolg van Example 2.8):

Y_n : aantal pakketten dat gedurende het n-de tijdslot verloren gaat.

Gevraagd: $E(Y_n \,|\, X_0 = 0)$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Er geldt

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \max(0, A_{n+1} - K), & \text{als } X_n = 0, \\ \max(0, X_n - 1 + A_{n+1} - K), & \text{als } X_n > 0, \end{cases}$$

en dus

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} \,|\, X_0 = 0) &= p_{0,0}^{(n)} E(\max(0, A_{n+1} - K) \\ &+ \sum_{k=1}^{K} p_{0,k}^{(n)} E(\max(0, k - 1 + A_{n+1} - K)) \end{aligned}$$

Met $a_r = P(A_{n+1} = r)$ geeft dit

$$E(Y_{n+1} \mid X_0 = 0) =$$

$$p_{0,0}^{(n)} \cdot \sum_{r=K}^{\infty} a_r \cdot (r - K) + \sum_{k=1}^{K} p_{0,k}^{(n)} \cdot \sum_{r=K+1-k}^{\infty} a_r \cdot (r - K - 1 + k)$$

(zie voor verdere uitwerking van dit voorbeeld Example 2.12 in het boek)

TOTALE TIJD IN TOESTAND
(= OCCUPANCY TIME)

We willen *totale verwachte tijd in bepaalde toestand* over een tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$ weten.
Aangezien de tijd tussen 2 transities gelijk aan 1 tijdseenheid is, komt dit overeen met het *verwachte aantal keren in die toestand* over de tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Notatie:

$N_j(n)$: Aantal keren in toestand j over tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$.

en
$m_{i,j}(n) = E(N_j(n) \,|\, X_0 = i)$.

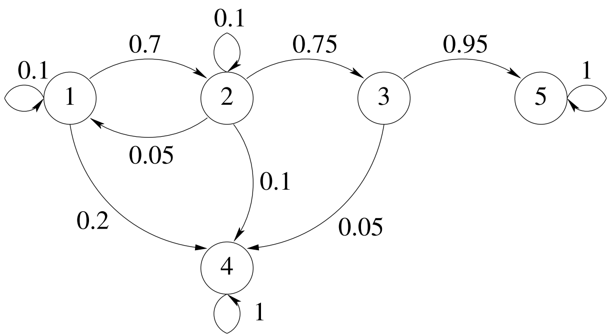
Bewering:

$$m_{i,j}(n) = \sum_{r=0}^{n} P(X_r = j \mid X_0 = i) = \sum_{r=0}^{n} p_{i,j}^{(r)}$$

en dus in matrixnotatie

$$M(n) = \sum_{r=0}^{n} P^{(r)} = \sum_{r=0}^{n} P^r.$$

Voorbeeld (vervolg)



$$M(5) = I + P + \cdots + P^5 = \begin{pmatrix} 1.161 & 0.902 & 0.674 & 1.535 & 1.728 \\ 0.064 & 1.161 & 0.870 & 0.769 & 3.136 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0.250 & 4.750 \\ 0 & 0 & 0 & 6.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.000 \end{pmatrix}$$

$$M(10) = I + P + \cdots + P^{10} = \begin{pmatrix} 1.161 & 0.903 & 0.678 & 3.317 & 4.941 \\ 0.065 & 1.161 & 0.871 & 1.631 & 7.272 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0.500 & 9.500 \\ 0 & 0 & 0 & 11.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.000 \end{pmatrix}$$

$$M(20) = I + P + \cdots + P^{20} = \begin{pmatrix} 1.161 & 0.903 & 0.678 & 6.882 & 11.376 \\ 0.065 & 1.161 & 0.871 & 3.357 & 15.546 \\ 0 & 0 & 1.000 & 1.000 & 19.000 \\ 0 & 0 & 0 & 21.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.000 \end{pmatrix}$$

Merk op dat er, voor grote n, verschil is tussen datgene wat er gebeurt met enerzijds:

$$m_{i,j}(n), \text{ voor } j = 1, 2, 3,$$

en anderzijds

$$m_{i,j}(n), \text{ voor } j = 4, 5.$$

Wat is het verschil? Hoe zou dit komen?

Hier komen we later op terug!

LIMIETGEDRAG VAN MARKOV KETENS

Tot nu toe hebben we gekeken naar het *transiënte gedrag* van Markov ketens

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= [a_1^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)}] \\ &= [P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = N)] \end{aligned}$$

voor zekere eindige waarde van n.

In het vervolg zullen we kijken naar het *limietgedrag* van Markov ketens

$$\begin{aligned} \pi &= [\pi_1, \ldots, \pi_N] \\ &= [\lim_{n\to\infty} a_1^{(n)}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_N^{(n)}] \\ &= [\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1), \ldots, \lim_{n\to\infty} P(X_n = N)] \end{aligned}$$

De vector π heet de *limietverdeling* van de Markov keten.

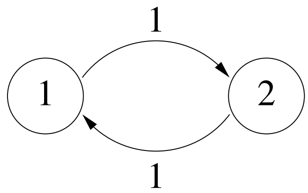
Vragen die we willen beantwoorden zijn:

- Bestaat de limietverdeling altijd?
- Als de limietverdeling bestaat, is hij dan uniek?
  (Hangt limietverdeling af van beginverdeling van de Markov keten?
  Of krijg je, onafhankelijk van beginverdeling, dezelfde limietverdeling?)
- Hoe bereken je de limietverdeling als hij bestaat?

We zullen eerst naar een drietal voorbeelden kijken.

Voorbeeld 1:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



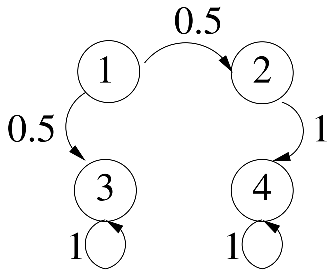
Stel $P(X_0 = 1) = 1$. Dan geldt

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= [1, 0], \\ a^{(1)} &= [0, 1], \\ a^{(2)} &= [1, 0], \\ a^{(3)} &= [0, 1], \\ \vdots &= \vdots \\ a^{(2n)} &= [1, 0], \\ a^{(2n+1)} &= [0, 1]. \end{aligned}$$

Conclusie: Limietverdeling bestaat niet!

Voorbeeld 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Stel $P(X_0 = 1) = 1$

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= [1, 0, 0, 0] \\ a^{(1)} &= [0, 0.5, 0.5, 0] \\ a^{(2)} &= [0, 0, 0.5, 0.5] \\ &\vdots \\ a^{(n)} &= [0, 0, 0.5, 0.5] \end{aligned}$$

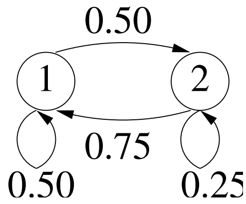
Stel $P(X_0 = 2) = 1$

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= [0, 1, 0, 0] \\ a^{(1)} &= [0, 0, 0, 1] \\ a^{(2)} &= [0, 0, 0, 1] \\ &\vdots \\ a^{(n)} &= [0, 0, 0, 1] \end{aligned}$$

Conclusie: Limietverdeling hangt af van beginverdeling!

Voorbeeld 3:

$$P = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$



Stel $P(X_0 = 1) = 1$	Stel $P(X_0 = 2) = 1$
$a^{(0)} = [1.000, 0.000]$	$a^{(0)} = [0.000, 1.000]$
$a^{(1)} = [0.500, 0.500]$	$a^{(1)} = [0.750, 0.250]$
$a^{(2)} = [0.625, 0.375]$	$a^{(2)} = [0.563, 0.437]$
$a^{(3)} = [0.594, 0.406]$	$a^{(3)} = [0.610, 0.390]$
$a^{(4)} = [0.602, 0.398]$	$a^{(4)} = [0.598, 0.402]$
$a^{(5)} = [0.600, 0.400]$	$a^{(5)} = [0.600, 0.400]$
$\vdots$	$\vdots$

Conclusie: Unieke limietverdeling!

Voor de Markov keten uit Voorbeeld 1 hebben we gezien dat er GEEN *limietverdeling* bestaat. WEL bestaan er voor dit voorbeeld een *stationaire verdeling* en een zogenaamde *occupatie verdeling*.

Definitie:

Een verdeling $\pi^* = [\pi_1^*, \ldots, \pi_N^*]$ heet een *stationaire verdeling* als geldt

$$\begin{aligned} P(X_0 = i) = \pi_i^*, &\qquad \text{voor } i = 1, \ldots, N \\ &\Downarrow \\ P(X_n = i) = \pi_i^*, &\qquad \text{voor } i = 1, \ldots, N \text{ en alle } n \geq 0 \end{aligned}$$

Ga voor Voorbeeld 1 na dat $\pi^* = [1/2, 1/2]$ een stationaire verdeling is.

Definitie:

Laat $N_j(n)$ het aantal bezoeken van een Markov keten aan toestand j in de tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$ zijn en

$$\hat{\pi}_j = \lim_{n\to\infty} \frac{E(N_j(n))}{n+1},$$

de lange-termijn fractie van de tijd dat de Markov keten zich in toestand j bevindt. De verdeling $\hat{\pi} = [\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_N]$ noemen we de *occupatie verdeling* van de Markov keten.

Ga voor Voorbeeld 1 na dat, onafhankelijk van de beginverdeling van de Markov keten, $\hat{\pi} = [1/2, 1/2]$ de occupatie verdeling is.

Hoe *berekenen* we nu limietverdelingen, stationaire verdelingen en occupatieverdelingen van Markov ketens?

Deze vraag wordt gedeeltelijk beantwoord door de volgende stelling (zie de Stellingen 2.5, 2.6 en 2.7 in het boek).

Stelling:

Voor zowel een limietverdeling π, een stationaire verdeling π^* en een occupatie verdeling $\hat{\pi}$ geldt dat, als ze bestaan, ze een oplossing zijn van het stelsel vergelijkingen $\pi = \pi \cdot P$ (respectievelijk $\pi^* = \pi^* \cdot P$ en $\hat{\pi} = \hat{\pi} \cdot P$) waarvoor bovendien geldt dat $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$ (respectievelijk $\sum_{i=1}^{N} \pi_i^* = 1$ en $\sum_{i=1}^{N} \hat{\pi}_i = 1$).

Waarom geldt dat er in Voorbeeld 1 GEEN limietverdeling bestaat, er in Voorbeeld 2 MEERDERE limietverdelingen bestaan en er in Voorbeeld 3 een UNIEKE limietverdeling bestaat?

Om een antwoord op deze vraag te kunnen geven, zullen we eerst twee *structuureigenschappen* van Markov ketens formuleren.

Definitie 2.3:
Een Markov keten heet *irreducibel* als er voor alle $i \in S$ en alle $j \in S$ een $k > 0$ bestaat zodanig dat $p_{i,j}^{(k)} > 0$. Als een Markov keten niet aan deze eigenschap voldoet, noemen we hem *reducibel*.

Merk op dat een Markov keten irreducibel is dan en slechts dan als je van iedere toestand i naar iedere andere toestand j kunt komen, in één of meerdere stappen.

Vraag: Zijn de Markov ketens in Voorbeeld 1, 2 en 3 reducibel of irreducibel?

Definitie 2.4:
Laat X_n een irreducibele Markov keten zijn en laat d het grootste gehele getal zijn zodanig dat voor alle $i \in S$ geldt

$$p_{i,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow \ n \text{ is een veelvoud van } d.$$

De Markov keten heet *periodiek* met periode d als $d > 1$ en *aperiodiek* als $d = 1$.

Vraag: Zijn de Markov ketens in Voorbeeld 1 en 3 periodiek of aperiodiek?

We zullen nu de hoofdstelling over het limietgedrag van Markov ketens formuleren.

Stelling:

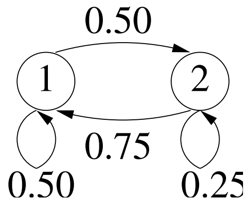
Een irreducibele, aperiodieke Markov keten met eindige toestandsruimte S heeft een unieke limietverdeling π, een unieke stationaire verdeling π^* en een unieke occupatie verdeling $\hat{\pi}$. Alle verdelingen zijn gelijk ($\pi = \pi^* = \hat{\pi}$) en ze zijn de unieke oplossing van het stelsel $\pi = \pi P$ waarvoor geldt $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$.

Voor een irreducibele, periodieke Markov keten geldt bovenstaand resultaat nog wel voor de stationaire verdeling en de occupatie verdeling. De limietverdeling bestaat in dit geval echter niet.

Het limietgedrag van reducibele Markov ketens wordt besproken in sectie 1 van de handout.

Vervolg Voorbeeld 3:

$$P = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$



Dit is een voorbeeld van een irreducibele, aperiodieke Markov keten. Het stelsel vergelijkingen $\pi = \pi P$ is in dit geval

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.50\pi_1 + 0.75\pi_2, \\ \pi_2 &= 0.50\pi_1 + 0.25\pi_2. \end{aligned}$$

Beide vergelijkingen reduceren tot de vergelijking $0.50\pi_1 = 0.75\pi_2$. Samen met de normalisatievergelijking

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

geeft dit de unieke oplossing $\pi_1 = 0.60, \pi_2 = 0.40$.