LIMIETGEDRAG VAN REDUCIBELE MARKOV KETEN

In het voorgaande hebben we gezien hoe we de limietverdeling van een *irreducibele, aperiodieke* Markov keten kunnen berekenen:

Zoek de unieke oplossing van het stelsel $\pi = \pi \cdot P$
waarvoor bovendien geldt dat $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$.

Voorbeeld 1:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

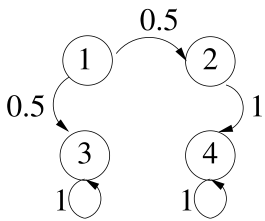
$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1/2\pi_3, & \rightarrow \quad & \pi_3 = 2\pi_1, \\ \pi_2 &= \pi_1 + 1/4\pi_2, & \rightarrow \quad & \pi_2 = 4/3\pi_1, \\ \pi_3 &= 3/4\pi_2 + 1/2\pi_3. & & \end{aligned}$$

Uit de normalisatievergelijking volgt $\pi_1(1+4/3+2) = 1$ en dus $\pi_1 = 3/13$.
De limietverdeling is $\pi = [3/13, 4/13, 6/13]$.

Maar hoe berekenen we nu de limietverdeling van een *reducibele* Markov keten?

Voorbeeld 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Het stelsel $\pi = \pi P$ geeft nu

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0.5\pi_1, \quad \pi_3 = 0.5\pi_1 + \pi_3, \quad \pi_4 = \pi_2 + \pi_4.$$

De normalisatievergelijking is $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$.
We concluderen dat *iedere* verdeling

$$\pi = [0, 0, \alpha, 1 - \alpha], \quad \text{met } 0 \leq \alpha \leq 1,$$

een genormaliseerde oplossing is van het stelsel $\pi = \pi P$.

Maar hoe weten we nu hoe we, afhankelijk van de beginverdeling, de waarde van α moeten kiezen?

Waarom geldt als $P(X_0 = 1)$ dat $\pi = [0, 0, 1/2, 1/2]$ en dus dat we $\alpha = 1/2$ moeten kiezen?

En waarom geldt als $P(X_0 = 2)$ dat $\pi = [0, 0, 0, 1]$ en dus dat we $\alpha = 0$ moeten kiezen?

En hoe zit het voor een willekeurige beginverdeling $a^{(0)}$?

Om een antwoord op deze vragen te kunnen geven, zullen we eerst een algemeen stappenplan formuleren voor het vinden van de limietverdeling van een reducibele Markov keten.

STAPPENPLAN VOOR HET VINDEN VAN LIMIETVERDELING VAN REDUCIBELE MARKOV KETEN.

Stap 1:

Verdeel de toestandsruimte S van de Markov keten in een aantal eindklassen $E_1, \ldots, E_m$ en een verzameling doorgangstoestanden C zodanig dat $S = C \cup E_1 \cup \cdots \cup E_m$.

Een *eindklasse* is een verzameling van verbonden toestanden zodanig dat als de Markov keten in deze verzameling toestanden terecht komt, hij daar nooit meer uit kan komen.

Met een *verzameling van verbonden toestanden* bedoelen we dat je van iedere toestand in de verzameling in één of meer stappen naar iedere andere toestand kan komen.

Toestanden die niet in een eindklasse zitten noemen we *doorgangstoestanden*.

Stap 2:

Bepaal voor iedere toestand $i \in S$ en voor iedere eindklasse E_j, $j = 1, \ldots, m$, de kans q_{i,E_j} dat de Markov keten, bij start in toestand i, in de eindklasse E_j belandt.

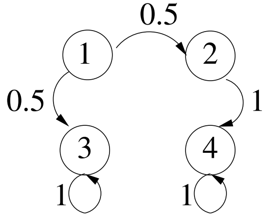
Stap 3:

Bepaal voor iedere eindklasse de limietverdeling (als die bestaat) van de Markov keten, gegeven dat je in deze eindklasse terecht bent gekomen. Merk op dat binnen een eindklasse een Markov keten zich gedraagt als een irreducibele Markov keten. We weten dus hoe we in zo'n geval de limietverdeling kunnen uitrekenen.

De limietverdeling van een reducibele Markov keten volgt uit een combinatie van de voorgaande drie stappen!

Vervolg voorbeeld 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Stap 1: $E_1 = \{3\}, E_2 = \{4\}, C = \{1, 2\}$.

Stap 2:

$$q_{1,E_1} = q_{1,E_2} = 1/2,\ q_{2,E_1} = q_{3,E_2} = q_{4,E_1} = 0,\ q_{2,E_2} = q_{3,E_1} = q_{4,E_2} = 1.$$

Stap 3: In eindklasse E_1 geldt $\pi_3 = 1$, in eindklasse E_2 geldt $\pi_4 = 1$.

Combinatie van stappen 1, 2 en 3 geeft de limietverdeling:

Als $P(X_0 = 1)$ dan $\pi = [0, 0, 1/2, 1/2]$, als $P(X_0 = 2)$ dan $\pi = [0, 0, 0, 1]$

Voorbeeld 3:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 3/5 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Stap 1: Teken plaatje en bepaal eindklassen + doorgangstoestanden.

Stap 2: Stel stelsel vergelijkingen op voor de kansen q_{i,E_j}.

Stap 3: Bepaal de limietverdeling voor de verschillende eindklassen.

Combineer de stappen 1,2 en 3.

MARKOV MODEL MET KOSTEN

In Markov modellen zijn we vaak geïnteresseerd in kostenberekeningen.

- voorraadmodel: voorraadkosten
- personeelsplanningmodel: salariskosten
- machineonderhoudsmodel: reparatiekosten

We zullen 3 soorten kostenberekeningen bekijken:

1. Totale verwachte kosten over eindige horizon
2. Lange-termijn verwachte kosten per periode
3. Totale verwachte kosten over oneindige horizon
   (alleen mogelijk als er alleen kosten in doorgangstoestanden zijn)

Totale verwachte kosten over eindige horizon

Stel dat iedere periode dat de Markov keten zich in toestand i bevindt dit verwachet kosten $c(i)$ met zich meebrengt.

Wat zijn de totale verwachte kosten over de tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$?

Definiëer

$g(i, n)$: totale verwachte kosten over tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$ bij start in toestand i.

Dan geldt

$$g(i, n) = \sum_{j=1}^{N} m_{i,j}(n)c(j).$$

Met de notatie

$$g(n) = \begin{pmatrix} g(1,n) \\ g(2,n) \\ \vdots \\ g(N,n) \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c(1) \\ c(2) \\ \vdots \\ c(N) \end{pmatrix}$$

hebben we dus

$$g(n) = M(n) * c.$$

Conclusie: Als we de matrix van occupatietijden $M(n)$ en de vector van kosten per periode c kennen, dan kunnen we de vector van totale verwachte kosten over een eindige horizon $g(n)$ uitrekenen.

Voorbeeld: Voorraadmodel uit Example 2.4.

Toestandsruimte: $S = \{2, 3, 4, 5\}$

Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0498 & 0 & 0 & 0.9502 \\ 0.1494 & 0.0498 & 0 & 0.8008 \\ 0.2240 & 0.1494 & 0.0498 & 0.4026 \\ 0.2240 & 0.2240 & 0.1494 & 0.4026 \end{pmatrix}$$

Stel voorraadkosten in toestand i: $50 * i$.

Dan totale verwachte voorraadkosten over tijdspanne $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

$$g(10) = \begin{pmatrix} 2161 \\ 2197 \\ 2229 \\ 2270 \end{pmatrix},$$

Lange-termijn verwachte kosten per periode

Als $n \to \infty$ dan gaan de totale verwachte kosten over de tijdspanne $\{0, 1, \ldots, n\}$ vaak ook naar oneindig. Daarom kijken we bij lange-termijn kostenberekeningen meestal naar de *verwachte kosten per peiode*:

$$g(i) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(i,n)}{n+1}.$$

Stelling:

Voor een irreducibele Markov keten met occupatie verdeling $\hat{\pi}$ geldt

$$g(i) = g = \sum_{j=1}^{N} \hat{\pi}_j c(j).$$

Merk op dat voor een irreducibele Markov keten de lange-termijn verwachte kosten per periode dus niet van de begintoestand afhangen.

Voorbeeld: Personeelsplanningmodel uit Example 2.6.

Toestandsruimte: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.970 & 0.030 & 0 & 0 \\ 0.008 & 0.982 & 0.010 & 0 \\ 0.020 & 0 & 0.975 & 0.005 \\ 0.010 & 0 & 0 & 0.990 \end{pmatrix}$$

Stel salariskosten in toestanden 1,2,3,4: 400,600,800,1000

Dan is de occuptie verdeling $\hat{\pi} = [0.273, 0.455, 0.182, 0.091]$ en de lange-termijn verwachte salariskosten per werknemer zijn

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{\pi}_j c(j) = 618.2$$

Totale verwachte kosten over oneindige horizon

Als er *alleen kosten in doorgangstoestanden* gemaakt worden gaan de totale verwachte kosten *niet* naar oneindig als $n \to \infty$.

Hoe berekenen we in dat geval $\tilde{g}(i) = \lim_{n\to\infty} g(i,n)$?

Stel A de verzameling van toestanden in eindklassen en dus $S \setminus A$ de verzameling van doorgangstoestanden.

Door te kijken wat er in de eerste stap met de Markov keten gebeurt kan je laten zien dat

$$\tilde{g}(i) = c(i) + \sum_{j \in S\setminus A} p_{i,j}\tilde{g}(j), \qquad i \in S \setminus A.$$

Dit stelsel vergelijkingen kan vervolgens opgelost worden.

Voorbeeld rijbewijsmodel

Toestandsruimte: $\{T_1, T_2, P_1, P_2, P_3, P_4, G, M\}$

Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.24 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.43 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.72 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transitiediagram: zie aparte slide

Wat stellen de verschillende toestanden voor?

T_1, T_2: theorie-examens (1e + 2e keer)

P_1, P_2, P_3, P_4: praktijk-examens (1e,2e,3e,$\geq$ 4e keer)

G: Weg met rijbewijs (Geslaagd)

M: Weg zonder rijbewijs (Mislukt)

kosten theorie-examen: 45 euro per keer,
kosten praktijk-examen: 90 euro per keer.

Vraag: Wat zijn de totale verwachte kosten over een oneindige horizon?

Laat $\tilde{g}(i)$ de totale verwachte kosten over een oneindige horizon zijn bij start in toestand i. Dan geldt

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(T_1) &= 45 + 0.1\tilde{g}(T_2) + 0.9\tilde{g}(P_1), \\
\tilde{g}(T_2) &= 45 + \tilde{g}(P_1), \\
\tilde{g}(P_1) &= 90 + 0.9\tilde{g}(P_2), \\
\tilde{g}(P_2) &= 90 + 0.75\tilde{g}(P_3), \\
\tilde{g}(P_3) &= 90 + 0.55\tilde{g}(P_4), \\
\tilde{g}(P_4) &= 90 + 0.25\tilde{g}(P_4).
\end{aligned}
$$

en dus

$$
\tilde{g}(P_4) = 120, \quad \tilde{g}(P_3) = 156, \quad \tilde{g}(P_2) = 207
$$
$$
\tilde{g}(P_1) = 276.3, \quad \tilde{g}(T_2) = 321.3 \quad \tilde{g}(T_1) = 325.8.
$$

Tijd tot je voor het eerst in bepaalde toestanden komt (First passage times)

In het voorafgaande hebben we twee keer gezien dat je een grootheid kan berekenen met behulp van een zogenaamde "first-step analysis": stel een stelsel vergelijkingen op door te kijken naar wat in de eerste tijdstap met de Markov keten gebeurt.

- Berekening van de kans dat je in een bepaalde eindklasse terecht komt bij een reducibele Markov keten.
- Berekening van de totale verwachte kosten over een oneindige horizon bij een reducibele Markov keten met alleen kosten in de doorgangstoestanden.

Deze zelfde techniek zullen we nu toepassen om de verwachte tijd uit te rekenen tot een Markov keten voor het eerst in bepaalde toestanden terecht komt.

Laat A een deelverzameling van de toestandsruimte zijn en definieer $m_i(A)$ als de verwachte tijd totdat de Markov keten voor het eerst in deelverzameling A komt bij start in toestand i.

Dan geldt natuurlijk $m_i(A) = 0$ als $i \in A$ en verder

$$m_i(A) = 1 + \sum_{j \in S \setminus A} p_{i,j} m_j(A), \quad i \notin A.$$

Dit levert wederom een stelsel vergelijkingen op waarmee de grootheden $m_i(A)$ voor $i \notin A$ opgelost kunnen worden.

Voorbeeld: Personeelsplanning probleem

Bereken de verwachte tijd dat een werknemer in het bedrijf werkzaam is.
Markov model voor 1 specifieke werknemer:

Toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, \text{ weg}\}$

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.982 & 0.01 & 0 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.975 & 0.005 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laat nu $A = \{\text{weg}\}$ en dus $S \setminus A = \{1, 2, 3, 4\}$.

De grootheden $m_i(A)$ voldoen nu aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned}
m_1(A) &= 1 + 0.95m_1(A) + 0.03m_2(A) \\
m_2(A) &= 1 + 0.982m_2(A) + 0.01m_3(A) \\
m_3(A) &= 1 + 0.975m_3(A) + 0.005m_4(A) \\
m_4(A) &= 1 + 0.99m_4(A)
\end{aligned}$$

De oplossing van dit stelsel vergelijkingen wordt gegeven door

$$m_4(A) = 100, \quad m_3(A) = 60, \quad m_2(A) = 88.89, \quad m_1(A) = 73.33$$

Kennelijk blijft een werknemer gemiddeld 73.33 weken (is ongeveer 1.4 jaar) werkzaam in het bedrijf.