

MARKOV MODEL MET KOSTEN

In Markov modellen zijn we vaak geïnteresseerd in kostenberekeningen.

- voorraadmodel: voorraadkosten
- personeelsplanningmodel: salariskosten
- machineonderhoudsmodel: reparatiekosten

We zullen 3 soorten kostenberekeningen bekijken:

1. Totale verwachte kosten over eindige horizon
2. Lange-termijn verwachte kosten per periode
3. Totale verwachte kosten over oneindige horizon
(alleen mogelijk als er alleen kosten in doorgangstoestanden zijn)

Totale verwachte kosten over eindige horizon

Stel dat iedere periode dat de Markov keten zich in toestand i bevindt dit verwacht kosten $c(i)$ met zich meebrengt.

Wat zijn de totale verwachte kosten over de tijdsperiode $\{0, 1, \dots, n\}$?

Definiëer

$g(i, n)$: totale verwachte kosten over tijdsperiode $\{0, 1, \dots, n\}$ bij start in toestand i .

Dan geldt

$$g(i, n) = \sum_{j=1}^N m_{i,j}(n) c(j).$$

Met de notatie

$$g(n) = \begin{pmatrix} g(1, n) \\ g(2, n) \\ \vdots \\ g(N, n) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c(1) \\ c(2) \\ \vdots \\ c(N) \end{pmatrix}$$

hebben we dus

$$g(n) = M(n) * c.$$

Conclusie: Als we de matrix van occupatietijden $M(n)$ en de vector van kosten per periode c kennen, dan kunnen we de vector van totale verwachte kosten over een eindige horizon $g(n)$ uitrekenen.

Voorbeeld: Voorraadmodel uit Example 2.4.

Toestandsruimte: $S = \{2, 3, 4, 5\}$

Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0498 & 0 & 0 & 0.9502 \\ 0.1494 & 0.0498 & 0 & 0.8008 \\ 0.2240 & 0.1494 & 0.0498 & 0.4026 \\ 0.2240 & 0.2240 & 0.1494 & 0.4026 \end{pmatrix}$$

Stel voorraadkosten in toestand i : $50 * i$.

Dan totale verwachte voorraadkosten over tijdsperiode $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$

$$g(10) = \begin{pmatrix} 2161 \\ 2197 \\ 2229 \\ 2270 \end{pmatrix},$$

Lange-termijn verwachte kosten per periode

Als $n \rightarrow \infty$ dan gaan de totale verwachte kosten over de tijdsperiode $\{0, 1, \dots, n\}$ vaak ook naar oneindig. Daarom kijken we bij lange-termijn kostenberekeningen meestal naar de *verwachte kosten per periode*:

$$g(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(i, n)}{n + 1}.$$

Stelling:

Voor een irreducibele Markov keten met occupatie verdeling $\hat{\pi}$ geldt

$$g(i) = g = \sum_{j=1}^N \hat{\pi}_j c(j).$$

Merk op dat voor een irreducibele Markov keten de lange-termijn verwachte kosten per periode dus niet van de begintoestand afhangen.

Voorbeeld: Personeelsplanningmodel uit Example 2.6.

Toestandsruimte: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.970 & 0.030 & 0 & 0 \\ 0.008 & 0.982 & 0.010 & 0 \\ 0.020 & 0 & 0.975 & 0.005 \\ 0.010 & 0 & 0 & 0.990 \end{pmatrix}$$

Stel salariskosten in toestanden 1,2,3,4: 400,600,800,1000

Dan is de occupatie verdeling $\hat{\pi} = [0.273, 0.455, 0.182, 0.091]$ en de lange-termijn verwachte salariskosten per werknemer zijn

$$\sum_{j=1}^N \hat{\pi}_j c(j) = 618.2$$

Totale verwachte kosten over oneindige horizon

Als er *alleen kosten in doorgangstoestanden* gemaakt worden gaan de totale verwachte kosten *niet* naar oneindig als $n \rightarrow \infty$.

Hoe berekenen we in dat geval $\tilde{g}(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(i, n)$?

Stel A de verzameling van toestanden in eindklassen en dus $S \setminus A$ de verzameling van doorgangstoestanden.

Door te kijken wat er in de eerste stap met de Markov keten gebeurt kan je laten zien dat

$$\tilde{g}(i) = c(i) + \sum_{j \in S \setminus A} p_{i,j} \tilde{g}(j), \quad i \in S \setminus A.$$

Dit stelsel vergelijkingen kan vervolgens opgelost worden.

Voorbeeld rijbewijsmodel

Toestandsruimte: $\{T_1, T_2, P_1, P_2, P_3, P_4, G, M\}$

Overgangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.24 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.43 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.72 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transitiedigram: zie aparte slide

Wat stellen de verschillende toestanden voor?

T_1, T_2 : theorie-examens (1e + 2e keer)

P_1, P_2, P_3, P_4 : praktijk-examens (1e, 2e, 3e, \geq 4e keer)

G: Weg met rijbewijs (Geslaagd)

M: Weg zonder rijbewijs (Mislukt)

kosten theorie-examen: 45 euro per keer,
kosten praktijk-examen: 90 euro per keer.

Vraag: Wat zijn de totale verwachte kosten over een oneindige horizon?

Laat $\tilde{g}(i)$ de totale verwachte kosten over een oneindige horizon zijn bij start in toestand i . Dan geldt

$$\tilde{g}(T_1) = 45 + 0.1\tilde{g}(T_2) + 0.9\tilde{g}(P_1),$$

$$\tilde{g}(T_2) = 45 + \tilde{g}(P_1),$$

$$\tilde{g}(P_1) = 90 + 0.9\tilde{g}(P_2),$$

$$\tilde{g}(P_2) = 90 + 0.75\tilde{g}(P_3),$$

$$\tilde{g}(P_3) = 90 + 0.55\tilde{g}(P_4),$$

$$\tilde{g}(P_4) = 90 + 0.25\tilde{g}(P_4).$$

en dus

$$\begin{aligned} \tilde{g}(P_4) &= 120, & \tilde{g}(P_3) &= 156, & \tilde{g}(P_2) &= 207 \\ \tilde{g}(P_1) &= 276.3, & \tilde{g}(T_2) &= 321.3 & \tilde{g}(T_1) &= 325.8. \end{aligned}$$

Tijd tot je voor het eerst in bepaalde toestanden komt (First passage times)

In het voorafgaande hebben we twee keer gezien dat je een grootheid kan berekenen met behulp van een zogenaamde "first-step analysis": stel een stelsel vergelijkingen op door te kijken naar wat in de eerste tijdstap met de Markov keten gebeurt.

- Berekening van de kans dat je in een bepaalde eindklasse terecht komt bij een reducibele Markov keten.
- Berekening van de totale verwachte kosten over een oneindige horizon bij een reducibele Markov keten met alleen kosten in de doorgangstoestanden.

Deze zelfde techniek zullen we nu toepassen om de verwachte tijd uit te rekenen tot een Markov keten voor het eerst in bepaalde toestanden terecht komt.

Laat A een deelverzameling van de toestandruimte zijn en definieer $m_i(A)$ als de verwachte tijd totdat de Markov keten voor het eerst in deelverzameling A komt bij start in toestand i .

Dan geldt natuurlijk $m_i(A) = 0$ als $i \in A$ en verder

$$m_i(A) = 1 + \sum_{j \in S \setminus A} p_{i,j} m_j(A), \quad i \notin A.$$

Dit levert wederom een stelsel vergelijkingen op waarmee de grootheden $m_i(A)$ voor $i \notin A$ opgelost kunnen worden.

Voorbeeld: Personeelsplanning probleem

Bereken de verwachte tijd dat een werknemer in het bedrijf werkzaam is.
Markov model voor 1 specifieke werknemer:

Toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, \text{weg}\}$

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.982 & 0.01 & 0 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.975 & 0.005 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laat nu $A = \{\text{weg}\}$ en dus $S \setminus A = \{1, 2, 3, 4\}$.

De grootheden $m_i(A)$ voldoen nu aan de vergelijkingen

$$m_1(A) = 1 + 0.95m_1(A) + 0.03m_2(A)$$

$$m_2(A) = 1 + 0.982m_2(A) + 0.01m_3(A)$$

$$m_3(A) = 1 + 0.975m_3(A) + 0.005m_4(A)$$

$$m_4(A) = 1 + 0.99m_4(A)$$

De oplossing van dit stelsel vergelijkingen wordt gegeven door

$$m_4(A) = 100, \quad m_3(A) = 60, \quad m_2(A) = 88.89, \quad m_1(A) = 73.33$$

Kennelijk blijft een werknemer gemiddeld 73.33 weken (is ongeveer 1.4 jaar) werkzaam in het bedrijf.

COHORTE MODELLEN

Markov ketens worden vaak gebruikt bij de bestudering van een *groep* van personen of objecten. We spreken dan meestal over *Cohorte modellen*. Een voorbeeld van zo'n situatie is het personeelsplanning model.

In het personeelsplanning model hebben we tot nu toe aangenomen dat het *totaal aantal werknemers constant is*. Elke keer als een werknemer het bedrijf verlaat, wordt hij of zij onmiddellijk opgevolgd door een nieuwe werknemer.

Met behulp van de tot nu toe geleerde theorie over Markov ketens zijn we voor deze situatie in staat om zowel het korte-termijn als het lange-termijn gedrag van het aantal werknemers in de verschillende salarisschalen te bepalen.

Voorbeeld: Personeelsplanning model

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0.008 & 0.982 & 0.01 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.975 & 0.005 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}.$$

Stel er zijn 100 werknemers en aan het begin van week 1 zitten daarvan 50 in schaal 1, 25 in schaal in schaal 2, 15 in schaal 3 en 10 schaal 4.

Wat verwacht je dan aan het begin van week 5, 11 en 100?

Wat verwacht je op de lange termijn?

We hebben

$$a^{(0)} = [0.50, 0.25, 0.15, 0.10]$$

en dus

$$a^{(4)} = a^{(0)} \cdot P^4 = [0.466, 0.289, 0.146, 0.099],$$

$$a^{(10)} = a^{(0)} \cdot P^{10} = [0.424, 0.336, 0.143, 0.098],$$

$$a^{(99)} = a^{(0)} \cdot P^{99} = [0.274, 0.461, 0.177, 0.088].$$

Hiermee kunnen de verwachte aantallen werknemers in de verschillende schalen in week 5, 11 en 100 uitgerekend worden.

De unieke genormaliseerde oplossing van het stelsel vergelijkingen $\pi = \pi P$ wordt gegeven door

$$\pi = [0.273, 0.454, 0.182, 0.091].$$

Op den lange duur verwachten we dus ruim 27 werknemers in schaal 1, 45 in schaal 2, 18 in schaal 3 en 9 in schaal 4.

In veel toepassingen is de aanname dat het aantal personen in de groep constant is in de loop van de tijd niet realistisch. Het vertrekproces van personen uit de groep enerzijds en het aankomstproces van nieuwe personen in de groep is soms zelfs geheel onafhankelijk van elkaar.

Voorbeeld: Het aantal personen dat een autoverzekering bij een bepaalde verzekeringsmaatschappij heeft afgesloten. (De verschillende schalen stellen hier de verschillende trappen in de bonus-malus ladder van de verzekering voor.)

Hoe berekenen we in dit soort situaties grootheden als

- het verwachte aantal personen op een bepaald tijdstip in de verschillende schalen (korte-termijn gedrag)?
- het verwachte aantal personen op den lange duur in de verschillende schalen (lange-termijn gedrag)?

Stel we hebben een groep personen, waarvan het gedrag van ieder persoon afzonderlijk beschreven wordt door een Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ en overgangsmatrix P .

Toestand 0 stelt de situatie voor dat de persoon het systeem verlaten heeft.

Q is het deel van de overgangsmatrix dat correspondeert met overgangen van de toestanden $\{1, 2, \dots, N\}$ naar de toestanden $\{1, 2, \dots, N\}$.

Merk op dat Q een *sub-stochastische matrix* is, d.w.z. een matrix waarvoor geldt dat $q_{i,j} \geq 0$ voor alle i en j en $\sum_{j=1}^N q_{i,j} \leq 1$ voor alle i .

Voorbeeld: **Personeelsplanning model** (model voor 1 werknemer)

Toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.95 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0.008 & 0 & 0.982 & 0.01 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0.975 & 0.005 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.982 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.975 & 0.005 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}$$

Korte-termijn gedrag

Notatie:

- $r_i^{(n)}$: Het verwachte aantal *nieuwe* personen, *recruten* genaamd, die van buiten op tijdstip n de groep binnenkomen in toestand i .
- $s_i^{(n)}$: Het verwachte totaal aantal personen op tijdstip n in de groep in toestand i .

Als we met $r^{(n)}$ en $s^{(n)}$ de liggende vectoren

$$r^{(n)} = [r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \dots, r_N^{(n)}], \quad s^{(n)} = [s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots, s_N^{(n)}],$$

noteren, dan hebben we

$$s^{(n)} = r^{(n)} + s^{(n-1)} \cdot Q$$

Conclusie: Als we de beginvector $s^{(0)}$ en de vectoren van aantallen recruten op de verschillende tijdstippen $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \dots$ kennen, kunnen we de vectoren $s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, \dots$ uitrekenen.

Voorbeeld:

Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Neem verder aan dat $s^{(0)} = [10, 10, 10, 10]$ en $r^{(n)} = [10, 0, 0, 0]$ voor alle n .

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= [10, 0, 0, 0] + [10, 10, 10, 10] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= [16, 9, 9.5, 11]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^{(2)} &= [10, 0, 0, 0] + [16, 9, 9.5, 11] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= [19.6, 9.5, 8.9, 11.8]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^{(3)} &= [10, 0, 0, 0] + [19.6, 9.5, 8.9, 11.8] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= [21.76, 10.57, 8.61, 12.40]. \end{aligned}$$

Enzovoorts.

Lange-termijn gedrag

In het geval dat het verwachte aantal recruten *tijdhomogeen* is, d.w.z. $r^{(n)} = r$ voor alle n , dan kunnen we ook het verwachte aantal personen op den lange duur in de verschillende toestanden uitrekenen.

In dit geval geldt voor $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s^{(n)}$ dat

$$s = r + s \cdot Q,$$

en dus dat

$$s = r \cdot (I - Q)^{-1}$$

waarbij I de identiteitsmatrix is.

Opmerking: Dat de inverse van de matrix $I - Q$ bestaat volgt uit het feit dat de matrix Q sub-stochastisch is.

Vervolg voorbeeld:

In het voorbeeld geldt $r^{(n)} = r = [10, 0, 0, 0]$ voor alle n en

$$\begin{aligned} I - Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} s = \lim_{n \rightarrow \infty} s^{(n)} &= [10, 0, 0, 0] \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= [25, 16.67, 13.89, 27, 78] \approx [25, 17, 14, 28]. \end{aligned}$$