Onderwerpen uit de Knopen theorie

scriptie van:
G.R. Pellikaan, olv.:
Prof W.T. van Est

25 maart 1981

Inhoud

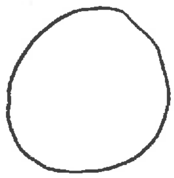
§1 Knopen

Def. Laat K een deelverzameling van de $\mathbb{R}^3$ zijn, en homeomorf met de eenheidscirkel S^1, dan wordt K een knoop in de $\mathbb{R}^3$ genoemd.

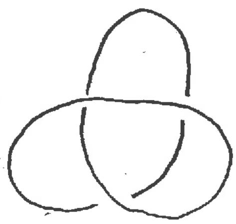
Is $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ en K_i een knoop in de $\mathbb{R}^3$ en $K_i \cap K_j = \emptyset$ als $1 \le i < j \le n$, dan heet L een link in de $\mathbb{R}^3$ met n componenten.

opm. In plaats van de $\mathbb{R}^3$ worden ook wel knopen in een andere 3 dimensionale manifold M beschouwd.
In het bijzonder worden knopen in de 3sfeer S^3 bestudeerd.

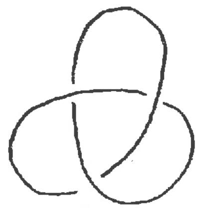
vb. Een knoop wordt veelal gegeven door een projectie ervan op een vlak.
zoals:



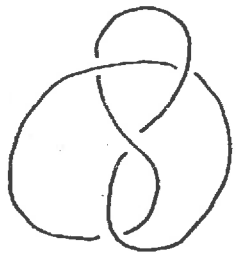
K_1



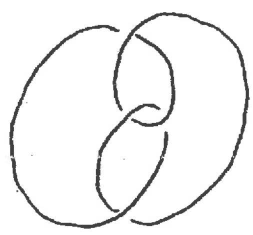
K_2



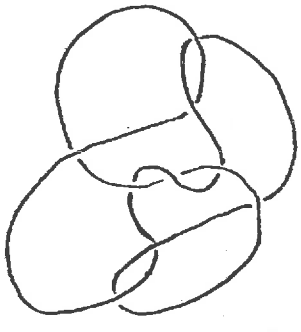
K_3



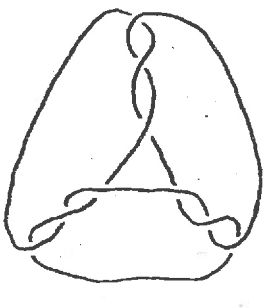
K_4



K_5



K_6



K_7

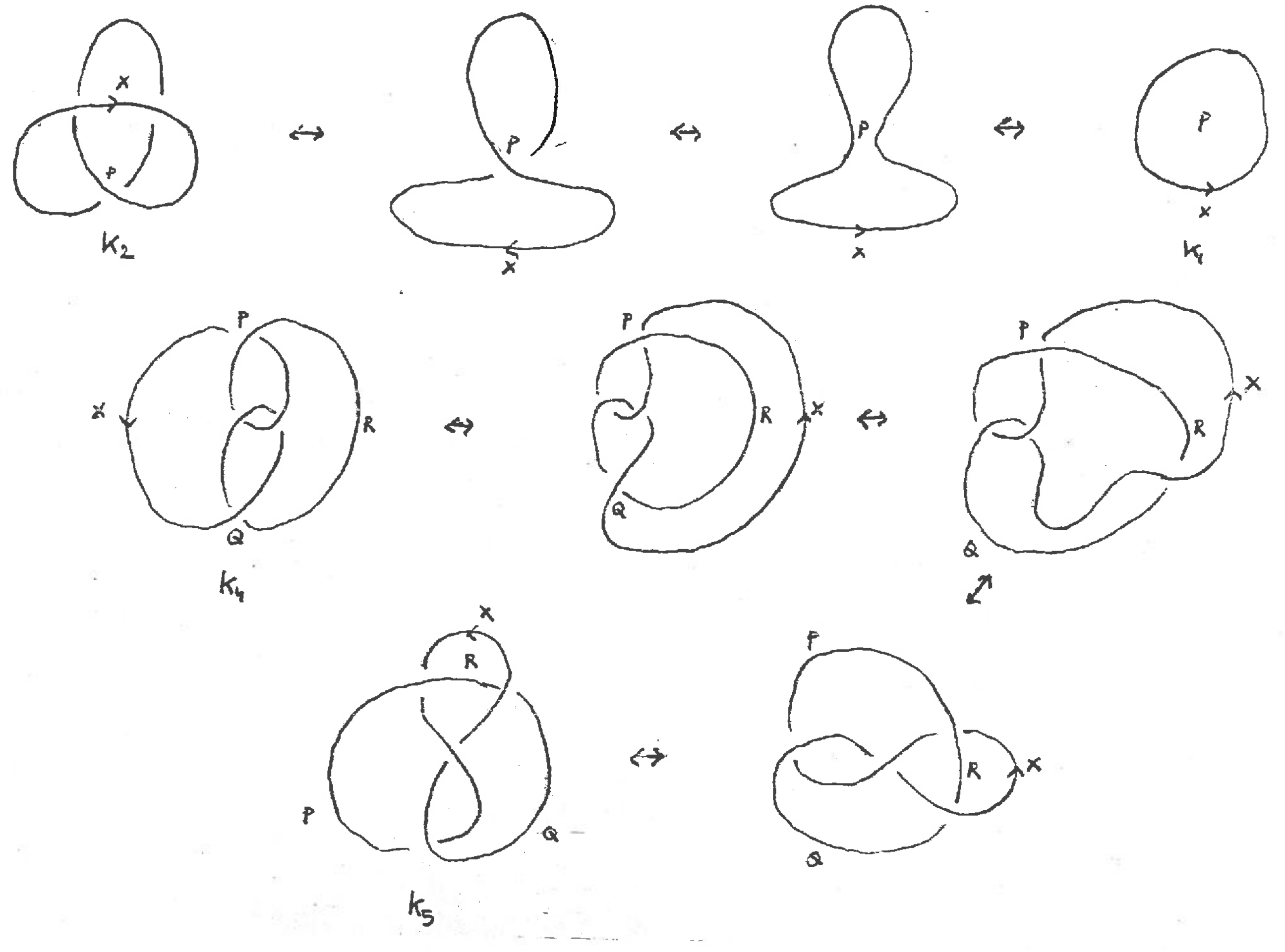
<u>Def.</u> Twee knopen K_1 en K_2 in de $\mathbb{R}^3$ heten <u>equivalent</u> als er een homeomorfisme $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is zdd $h(K_1) = K_2$

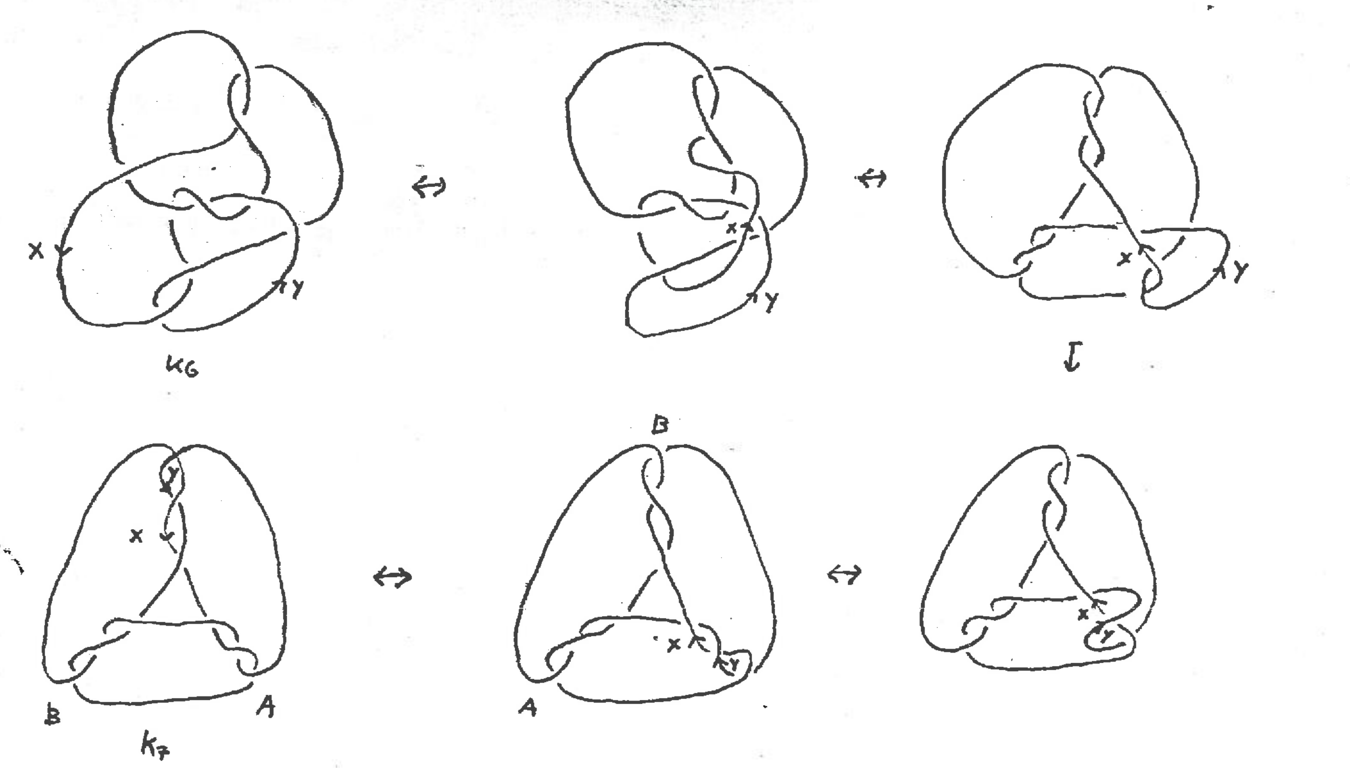
<u>opm.</u> Dit definieert een equivalentierelatie op de collectie knopen in de $\mathbb{R}^3$, zoals makkelijk is na te gaan.
De equivalentieklasse van de knoop K wordt ook wel het <u>type</u> van K genoemd.

<u>vb.</u> De eenheidscirkel S^1 in de $\mathbb{R}^3$, met $S^1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1 \text{ en } z=0\}$ is een knoop in de $\mathbb{R}^3$. Een knoop in de $\mathbb{R}^3$, die hetzelfde type heeft als S^1 in $\mathbb{R}^3$, heet <u>triviaal</u> of ongeknoopt. En niet triviale knopen in de $\mathbb{R}^3$ heten geknoopt.

Dit leidt tot de volgende vragen:
- Welke knopen in de lijst van de vorige bladzijde zijn triviaal en welke zijn geknoopt?
- Hoeveel verschillende typen zijn er in die lijst?

De equivalentie van respectievelijk K_1 en K_2, K_4 en K_5, K_6 en K_7 wordt gesuggereerd door de volgende reeksen van figuren:





K_3 wordt de <u>klaverblad</u> knoop en K_5 de <u>figuuracht</u> knoop genoemd. In de knopentabel van Alexander-Briggs wordt het type van K_3 met 3_1, van K_4 met 4_1 en van K_6 met 9_{46} aangegeven. (de 3, 4 en 9 duiden op het aantal kruisingen in het diagram van resp 3_1, 4_1 en 9_{46})

zie: Alexander, J.W en Briggs, G.B. : "On types of knotted curves." Annals of Mathematics, series 2, 28 (1927), 562-586.

Dat K_1, K_3, K_4 en K_6 onderling van verschillend type zijn, is aannemelijk, maar niet zo snel exakt te bewijzen.

We vermelden hier een stelling die handelt over triviale knopen:

stelling (1.1) Zij k een knoop die in een vlak van de R^3 ligt, dan is k triviaal.

bew (1.1) zie: Newman, A.H. : "Elements of the topology of plane sets of points." second edition, (Cambridge University Press, Cambridge, 1951), p. 173.

Gevolg (1.2) Zij k een knoop zodat $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, de projectie op het xy-vlak in de z-richting, $\pi(x,y,z)=(x,y)$, geen dubbelpunten heeft (dwz $(\pi|k)$ is injectief), dan is k triviaal.

bew. (1.2) $F := \pi(k)$, $\pi|k$ is injectief en k is compact, dus $(\pi|k)^{-1}: F \to \mathbb{R}^3$ is een welgedefinieerde en continue afbeelding, $p_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $p_3(x,y,z) := z$, is continu, dus $f: F \to \mathbb{R}$, met $f := p_3 \cdot (\pi|k)^{-1}$, is continu. F is een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ is een normale ruimte, volgens de Tietze Extensie stelling is er een $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu, zodat $\tilde{f}|F = f$.

Definieer nu h en $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door: $h(x,y,z) := (x, y, z - \tilde{f}(x,y))$ en $g(x,y,z) := (x, y, z + \tilde{f}(x,y))$, dan zijn h en g elkaars inverse. dus h is een homeomorfisme. $h(k)$ ligt in het xy-vlak. volgens stelling (1.1) is $h(k)$ triviaal, k is equivalent met $h(k)$, dus k is triviaal.

opm. Twee knopen k_1 en k_2 kunnen eenzelfde projectie op een vlak hebben, met dezelfde over- en onder-kruisingen, maar toch verschillende deelverzamelingen van de $\mathbb{R}^3$ zijn. Aangetoond kan worden dat k_1 en k_2 dan equivalent zijn, als k_1 en k_2 niet "te wild" (§3) zijn en de projectie "regulier" is mbt k_1 en k_2 (§4).
Gevolg (1.2) is het speciale geval waarin geen kruisingen voorkomen.

Om het type van knopen te kunnen onderscheiden, kijken we naar het complement van de knoop: $(\mathbb{R}^3 \setminus k)$ en merken op dat als k_1 en k_2 equivalente knopen zijn, dan is $(\mathbb{R}^3 \setminus k_1)$ homeomorf met $(\mathbb{R}^3 \setminus k_2)$. Want zij nl. $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een homeomorfisme met $h(k_1) = k_2$, dan is $h|(\mathbb{R}^3 \setminus k_1)$ een homeomorfisme van $(\mathbb{R}^3 \setminus k_1)$ op $(\mathbb{R}^3 \setminus k_2)$.

opm. Het is een vermoeden dat de omkering ook geldt: dwz. als k_1 en k_2 twee knopen zijn en $(\mathbb{R}^3 \setminus k_1) \cong (\mathbb{R}^3 \setminus k_2)$ dan zijn k_1 en k_2 van hetzelfde type.

zie: Rolfsen, D.: "Knots and Links", MLS 7 Publish or Perish Inc 1976, H.3. blz 48 en H.9.J. blz. 200.

Dus als k_1 en k_2 equivalent zijn, dan is $(\mathbb{R}^3 \setminus k_1)$ homeomorf met $(\mathbb{R}^3 \setminus k_2)$, maar dan is $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k_1)$ isomorf (als groep) met $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k_2)$. Hierin is $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k)$ de eerste fundamentaal groep van de buitenruimte $(\mathbb{R}^3 \setminus k)$ van de knoop k, (zie §5).
$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k)$ wordt de groep van de knoop k genoemd.

We zullen voor een zekere klasse van knopen de groep van de knoop berekenen (zie §6)
Van de groep van de knoop kunnen weer algebraïsche invarianten worden afgeleid, waarmee veel knopen onderling qua type kunnen worden onderscheiden (zie §9)

§2 Enkele alternatieven

Er zijn nog andere manieren om knopen te klassificeren. Naast het equivalentie begrip bestaat:

Def. Twee knopen K_1 en K_2 in de $\mathbb{R}^3$ heten *georiënteerd equivalent*, als er een oriëntatie behoudend homeomorfisme $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bestaat, zdd $h(K_1) = K_2$

opm. Vatten we de S^3 op als de éénpuntscompactificatie van de $\mathbb{R}^3$: $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, dan is elk homeomorfisme $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ op eenduidige wijze uit te breiden tot een homeomorfisme $\tilde{h}: S^3 \to S^3$, door $\tilde{h}(x) := h(x)$ als $x \in \mathbb{R}^3$ en $\tilde{h}(\infty) := \infty$. $\tilde{h}$ induceert een isomorfisme $\tilde{h}_*: H_3(S^3) \to H_3(S^3)$, $H_3(S^3)$ is de derde homologiegroep van S^3, deze is oneindig cyclisch, zij F een voortbrenger van $H_3(S^3)$, dan is $\tilde{h}_*(F)$ ook een voortbrenger van $H_3(S^3)$, dus $\tilde{h}_*(F) = +F$ of $\tilde{h}_*(F) = -F$. In het geval $\tilde{h}_*(F) = +F$, heet h *oriëntatie behoudend* (deze def. is onafhankelijk van de keuze van de voortbrenger F, want de enige twee voortbrengers van $H_3(S^3)$ zijn F en $-F$, als we $-F$ hadden gekozen voor F dan is: $\tilde{h}_*(-F) = -\tilde{h}_*(F) = (-F) = +(-F)$, als $\tilde{h}_*(F) = +F$.)

opm. Georiënteerd equivalent is een equivalentie relatie op de collectie knopen in de $\mathbb{R}^3$, want:

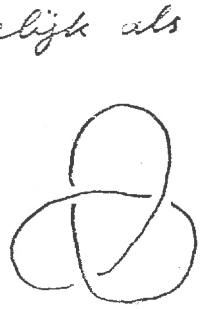
(i) $id_{\mathbb{R}^3}$ is oriëntatie behoudend.

(ii) h oriëntatie behoudend $\Rightarrow$ h^{-1} is oriëntatie behoudend.

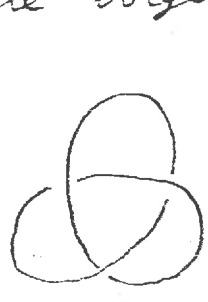
(iii) h_1 en h_2 zijn oriëntatie behoudend $\Rightarrow$ $h_2 h_1$ is oriëntatie behoudend

Deze relatie is sterker dan de gewone equivalentie.

Dat "georiënteerd equivalent" echt sterker is dan "equivalent", zullen we in deze scriptie niet bewijzen. Het is aannemelijk als we de volgende twee klaverblad knopen zien:



K_3



$\sigma(K_3)$

Voor een bewijs dat K_3 en $\sigma(K_3)$ niet georiënteerd equivalent zijn verwijzen we naar:

Dehn, M. : "Die beiden Kleeblattschlingen," Math. Ann. 75 (191 402-

Fox, R.H. : "On the Complementairy Domains of a Certain Pair of inequivalent knots" Indag. Math. 14 (1952), 3

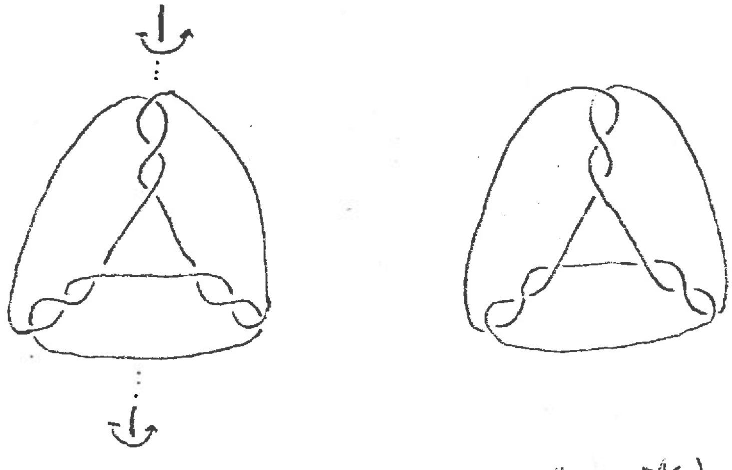
K_3 en $\sigma(K_3)$ zijn wel equivalent, omdat $\sigma(K_3)$ uit K_3 ontsta dmv een spiegeling $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(x,y,z) = (x,y,-z)$.

In het algemeen geven we met $\sigma(K)$ de knoop aan die het spiegelbeeld is van de knoop K onder de spiegeling σ.

Def. Een knoop K heet amphicheiraal als K en $\sigma(K)$ georiënteerd equivalent zijn

vb. Volgens het voorafgaande is K_3 niet amphicheiraal

vb. Aan de hand van twee tekeningen laten we zien dat K_7 wel amphicheiraal is. Voor de rotatie R om $180°$ om de aangegeven as en de spiegeling σ geldt: $\sigma(K_7) = R(K_7)$ (de rotatie R is een oriëntatie behoudend homeomorfisme).



K_7 $\sigma(K_7) = R(K_7)$

Naast de begrippen equivalent en georiënteerd equivalent kennen we nog:

Def. Twee knopen K_1 en K_2 heten homeotoop (of ambient isotoop) als er een familie homeomorfismen is: $\{h_t \mid 0 \le t \le 1\}$ zdd $h_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ en $h_1(K_1) = K_2$ en $H : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ is continu, met $H(x,t) := h_t(x)$.

Opm. Homeotopie is een equivalentie relatie op de collectie knopen in de $\mathbb{R}^3$.

opm. Als twee knopen k_1 en k_2 homeotoop zijn, dan zijn ze ook georiënteerd equivalent, want:
stel $\{h_t \mid 0 \le t \le 1\}$ is een continue familie homeomorfismen vd $\mathbb{R}^3$ naar de $\mathbb{R}^3$, en $h_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ en $h_1(k_1) = k_2$, dan is $\tilde{h}_t(x) := h_t(x)$ als $x \in \mathbb{R}^3$ en $\tilde{h}_t(\infty) := \infty$, $\{\tilde{h}_t \mid 0 \le t \le 1\}$ een continue familie homeomorfismen van de S^3 naar de S^3
$\tilde{h}_0 = id_{S^3}$, dus $\tilde{h}_0$ is homotoop met $\tilde{h}_1$, dus $\tilde{h}_{0*} = \tilde{h}_{1*}$
dus $\tilde{h}_{1*} = id_{H_3(S^3)} : H_3(S^3) \to H_3(S^3)$, dus h_1 is een oriëntatie behoudend homeomorfisme en $h_1(k_1) = k_2$, dus k_1 en k_2 zijn georiënteerd equivalent.

opm. Het omgekeerde is ook waar: k_1 homeotoop met $k_2 \Leftarrow k_1$ georiënteerd equivalent met k_2
Dit volgt direct uit de stelling die zegt:
$h: S^3 \to S^3$, h een oriëntatie behoudend homeomorfisme, dan is h homeotoop met id_{S^3}, dus er is een $H: S^3 \times [0,1] \to S^3$, een continue afbeelding zdd $h_t(x) := H(x,t)$, $h_t : S^3 \to S^3$ een homeomorfisme is en $h_0 = id_{S^3}$ en $h_1 = h$.

Voor een bewijs
zie: Fisher, G.M.: "On the Group of all Homeomorfisms of a Manifold" Trans. AMS 97 (1960), 193-212.

We hebben dus de volgende situatie:

$$\left(k_1 \text{ homeotoop met } k_2\right) \Leftrightarrow \left(k_1 \text{ georienteerd equivalent met } k_2\right) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \left(k_1 \text{ equivalent met } k_2\right)$$

Soms worden knopen ook wel op een strengere manier gedefinieerd: een knoop is dan een drietal $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ waarbij $k: S^1 \to \mathbb{R}^3$ een continue afbeelding is en $k: S^1 \to k(S^1)$ een homeomorfisme. In plaats van $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ schrijven we ook wel alleen k als er geen kans op verwarring is.
Nu is $K := k(S^1)$ een knoop in de oude betekenis. Omgekeerd: zij K een knoop in de oude betekenis, dan is $K \subset \mathbb{R}^3$ en $K \cong S^1$, dus er is een homeomorfisme $k: S^1 \to K$ en $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ is dan een knoop in de nieuwe betekenis, $K = k(S^1)$.

Met behulp van deze nieuwe definitie kunnen we weer definieren:

Def. $(S^1, k_1, \mathbb{R}^3)$ is equivalent met $(S^1, k_2, \mathbb{R}^3)$, als er een $h': S^1 \to S^1$ en een $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is, zdd h en h' homeomorfismen zijn en $k_2 h' = h k_1$ dus dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^3 \\ S^1 \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "h'"] \arrow[ur, phantom, "\circledast"] & S^1 \arrow[u, "k_2"'] \end{tikzcd}$$

opm. Het is duidelijk dat K_1 equivalent is met K_2 als $(S^1, k_1, \mathbb{R}^3)$ het met $(S^1, k_2, \mathbb{R}^3)$ is en $K_i = k_i(S^1)$, i=1,2.

Omgekeerd: $(S^1, k_1, \mathbb{R}^3)$ is equivalent met $(S^1, k_2, \mathbb{R}^3)$ als K_1 equivalent is met K_2

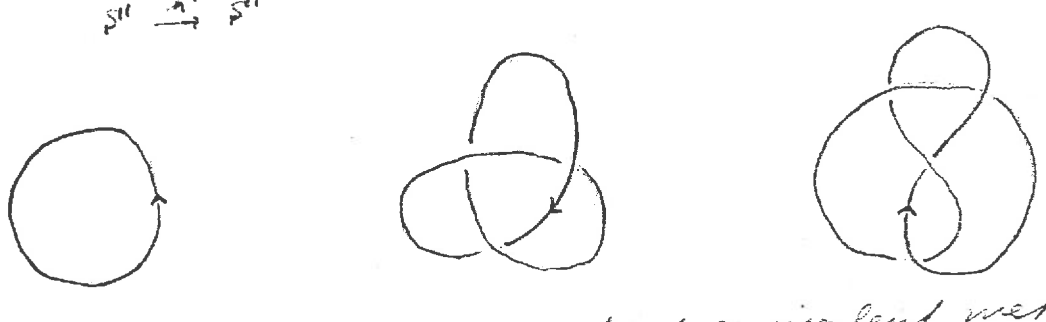
want: zij $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een homeomorfisme en $h(K_1) = K_2$ en $h' := k_2^{-1} h k_1$, dan is $h': S^1 \to S^1$ een homeomorfisme en $k_2 h' = h k_1$, dus k_1 is equivalent met k_2

Dus tot nu toe geeft deze nieuwe definitie niets nieuws

Dit wordt anders als we het begrip georiënteerd equivalent beschouwen:

Def. Twee knopen $(S^1, k_1, \mathbb{R}^3)$ en $(S^1, k_2, \mathbb{R}^3)$ heten georiënteerd equivalent als er een $h': S^1 \to S^1$ en een $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ homeomorfismen bestaan, h' en h oriëntatie behoudende homeomorfismen zdd het volgende diagram commutatief is:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^3 \\ S^1 \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "h'"] \arrow[ur, phantom, "\circledast"] & S^1 \arrow[u, "k_2"'] \end{tikzcd} \qquad \text{ofwel } k_2 h' = h k_1$$



opm. Ook nu is weer: k_1 georiënteerd equivalent met k_2 $\Rightarrow$ K_1 georiënteerd equivalent met K_2

Als $K_i = k_i(S^1)$, $i=1,2$.

De omkering hoeft niet waar te zijn: laat nl $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een oriëntatie behoudend homeomorfisme zijn en $h(K_1) = K_2$, dan is weer $h': S^1 \to S^1$ een homeomorfisme als $h' := k_2^{-1} h k_1$ en er geldt:

$$k_2 h' = h k_1$$

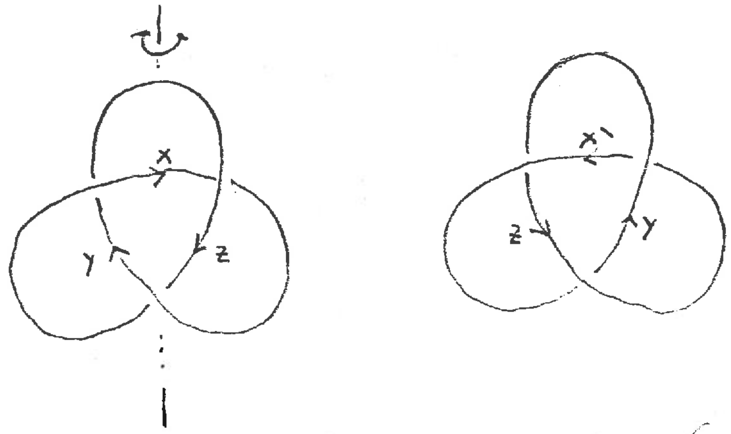
maar h' hoeft niet oriëntatie behoudend te zijn. (zie gevolg 2.1)

Def. Een knoop $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ heet <u>inverteerbaar</u> als $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ georiënteerd equivalent met $(S^1, ks, \mathbb{R}^3)$ is, waarbij $s: S^1 \to S^1$ gedefinieerd is door $s(x,y) := (x,-y)$, $(x,y) \in S^1$

vb K_3 is inverteerbaar, laat R de rotatie om $180°$ om de aangegeven as in de figuur zijn, dan is:

$k_2 h' = ks\, id = ks = R \cdot k = R k_1 = h k_1$, als $h := R$, $h' := id_{S^1}$, $k_1 = k$ en $k_2 = ks$

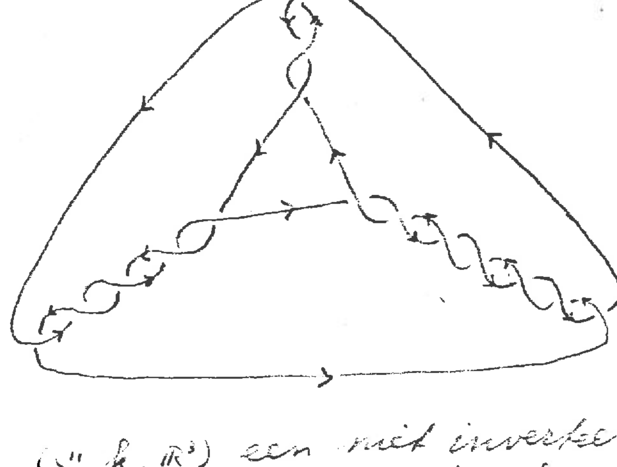
dus: $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ is georiënteerd equivalent met $(S^1, ks, \mathbb{R}^3)$ als $k: S^1 \xrightarrow{\sim} K_3$



Dat er niet inverteerbare knopen bestaan is pas betrekkelijk kort geleden bewezen door Trotter, in 1964.

zie: Trotter, H.F.: "Noninvertible knots exist." Topology 2 (1964), 275-280

We geven hier, zonder bewijs, een voorbeeld uit de oneindige familie niet inverteerbare knopen uit het artikel van Trotter.



Gevolg (2.1) Zij $(S^1, k, \mathbb{R}^3)$ een niet inverteerbare knoop en $k_1 := k(S^1)$ en $k_2 := ks(S^1)$, $k_1 = k$, $k_2 = ks$. Dan is per definitie k_1 niet georiënteerd equivalent met k_2, maar k_1 is wel georiënteerd equivalent met k_2, want neem $h := id_{\mathbb{R}^3}$, h is een oriëntatie behoudende homeomorfisme en $h(k_1) = k_1 = k(S^1) = k(sS^1) = ks(S^1) = k_2$.

Bij alle tot nu toe gedefinieerde equivalentie relaties is de groep van de knoop een invariant van de equivalentie klasse. Bij het volgende begrip, dat enigszins op het homeotopie begrip lijkt, is dit niet zo.

Def. Twee knopen k^1 en k^2 in $\mathbb{R}^3$ heten <u>isotoop</u>, als er een familie inbeddingen $\{h_t \mid 0 \le t \le 1\}$ is, zodat $H: S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, met $H(x,t) := h_t(x)$, continu is, en $h_0(S^1) = k^1$ en $h_1(S^1) = k^2$.

Opm. Isotopie is een equivalentie relatie op de collectie knopen in de $\mathbb{R}^3$.

Er geldt: k^1 homeotoop met $k^2 \Rightarrow k^1$ isotoop met k^2

Want stel H is een homeotopie van k^1 naar k^2, $H: \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ en $k: S^1 \to k^1$ een homeomorfisme, definieer nu $G: S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ met $G(x,t) := H(k(x),t)$, dan is G een isotopie van k^1 naar k^2.

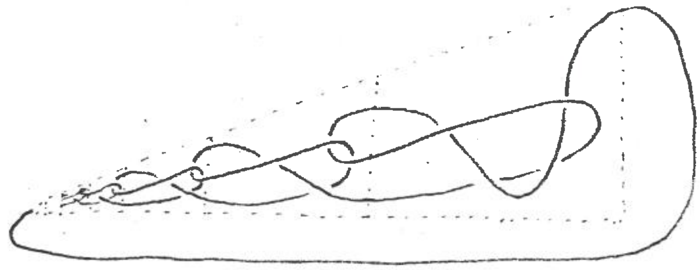
Het omgekeerde hoeft niet zo te zijn.

vb. De volgende reeks figuren suggereert dat de klaverblad knoop isotoop-triviaal is. In §8 zullen we controleren dat de klaverblad knoop niet triviaal is, dus ook niet homeotoop-triviaal.

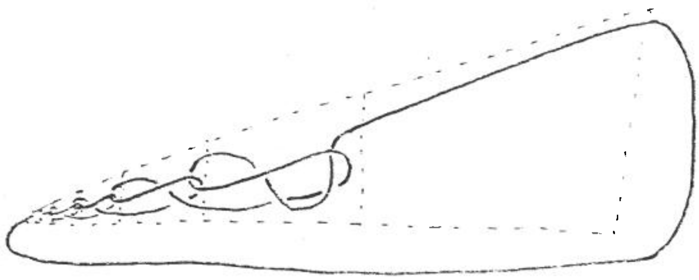
Dit voorbeeld is van J.W. Alexander
zie: "Some problems in topology", blz. 249. Verh. des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich, 1932.

vb Op bladzijde 2-7 is een reeks figuren getekend, die aannemelijk maakt dat de figuur bij $t=1$ isotoop is met de figuur bij $t=0$, deze laatste knoop is triviaal. We zullen in §8 zien dat de groep van de K_0 niet isomorf is met de groep van K_1. In het bijzonder volgt hieruit dat K_0 niet homeotoop is met K_1

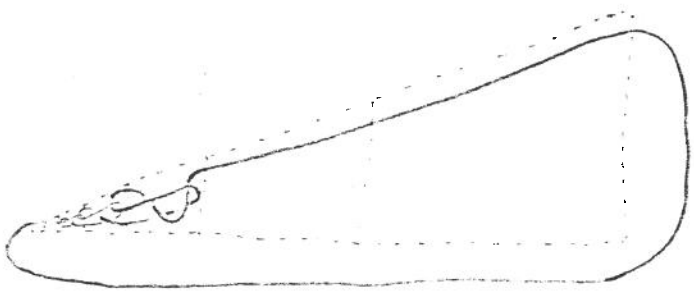
$t = 1$



$t = \frac{1}{2}$

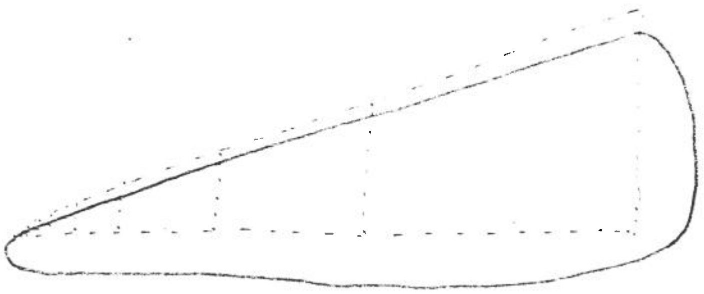


$t = \frac{1}{4}$



$t = \frac{1}{2^n}$

$t = 0$



Dit voorbeeld is van R.H. Fox.
Zie: "A Remarkable Simple Closed Curve", Ann. of Math. 50 (1949), blz. 264-265.

Verder merken we nog op dat we ipv continuïteit van de beschouwde afbeeldingen konden eisen dat ze k maal continu differentieerbaar zijn ($k = 1, 2, \dots, \infty$) of stuksgewijs lineair. Dus we konden ipv de categorie <u>Top</u> de categorie <u>C^k</u> of <u>PL</u> (= piecewise lineair) nemen.

Naast de gedefinieerde knopen kunnen we ook zg. <u>dikke knopen</u> bekijken, dit zijn deelverzamelingen van de R^3 die homeomorf zijn met een volle torus: $S^1 \times D^2$, waarin D^2 de eenheidsschijf in het vlak is, $D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

Deze ~~ko~~ dikke knopen komen misschien dichter bij het idee van knopen in het dagelijks leven (elastiekjes, geknoopte touwen)

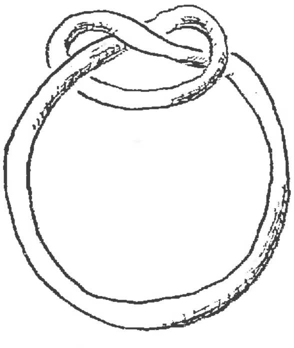
Met dikke knopen vermijden we bepaalde pathologieën, zoals wildheid (zie §3)

Voor dikke knopen kunnen weer de overeenkomstige begrippen: equivalent, georiënteerd equivalent, homotoop en isotoop worden ingevoerd.

<u>Vraag</u>: (1) Is de fundamentaalgroep van het complement van een dikke knoop een isotopie invariant?

(2) Geldt voor dikke knopen T_1 en T_2:
T_1 en T_2 isotoop $\Rightarrow$ T_1 en T_2 zijn homotoop. ?

We gaan in deze scriptie niet verder op deze vragen in.



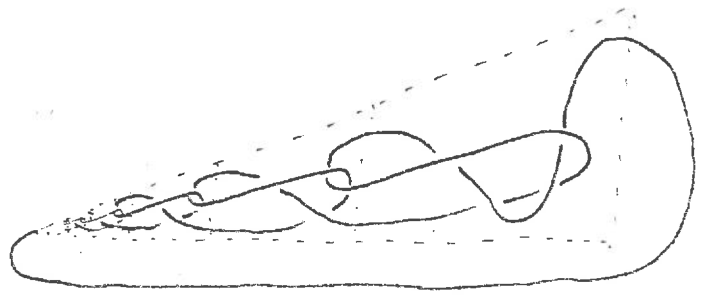
§3 Tamme en wilde knopen

We brengen nu een zekere hiërarchie aan in de collectie van knopen in de $\mathbb{R}^3$.

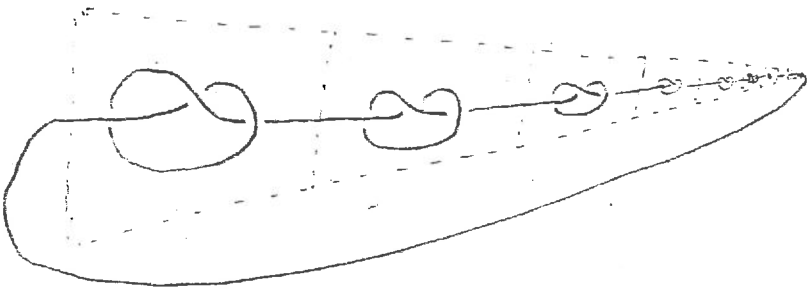
Def. Een knoop k in de $\mathbb{R}^3$ noemen we een polygoon knoop, als k de vereniging van een eindig aantal rechte lijnstukken is.

Def. Een knoop k in de $\mathbb{R}^3$ heet tam als k het type (blz. 1-2) van een polygoon knoop heeft, anders heet k wild.

vb We zijn op blz. 2-7 al een wilde knoop tegengekomen:



Een ander voorbeeld is:



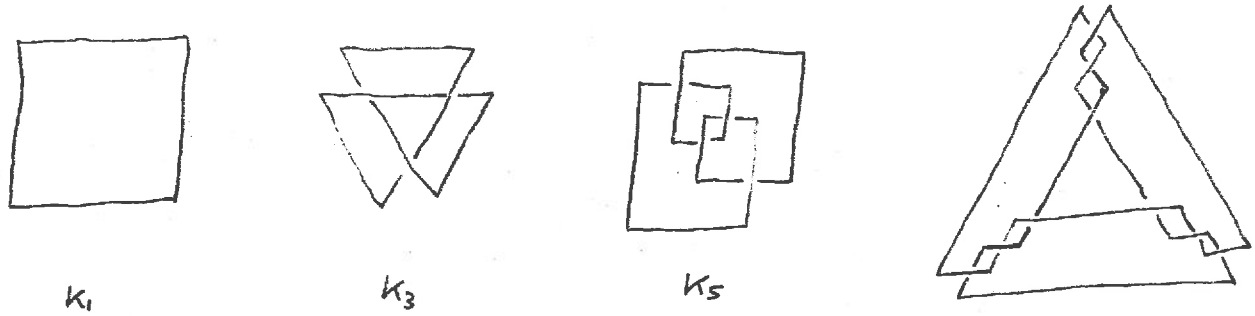
Dat deze twee knopen wild zijn, zal in §8 aangetoond worden.

Welke knopen, naast de polygoon knopen, zijn tam?
Een gedeeltelijk antwoord hierop is:

Stelling (3.1) Zij k een knoop, $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ continu differentieerbaar en periodiek met periode λ, $k([0,\lambda]) = K$ en booglengte van $k([0,t]) = t$ voor $0 \le t < \lambda$, dan is k tam.
Anders gezegd: Een knoop k, die continu differentieerbaar wordt geparametriseerd door zijn booglengte, is tam.

bew. (3.1) zie: Crowell, R.H. en Fox, R.H.: "Introduction to knot theory" appendix I, blz. 147, Springer GTM 57.

vb



K_1 K_3 K_5 K_7

De knopen K_1, K_3, K_5 en K_7 zijn tam.
(K_2, K_4 en K_6 ook), zie blz. 1-1.

Een karakterisering van tamme knopen is door Moise en Bing gegeven. Daarvoor eerst enkele definities:

Def. K, een knoop in de $\mathbb{R}^3$, heet <u>locaal tam in P</u>, $P \in K$, als er open verzamelingen U en V in de $\mathbb{R}^3$ zijn, zdd. $P \in U$, en er een homeomorfisme $g: U \to V$ is waarvoor geldt

$$g(U \cap K) = V \cap L \quad , L \text{ een polygoon in de } \mathbb{R}^3.$$

Def. Zij K, een knoop in de $\mathbb{R}^3$, T open in de $\mathbb{R}^3$ en $K \subset T$, dan heet T een <u>tubulaire omgeving</u> van K, als er een homeomorfisme $h: S^1 \times \mathring{D}^2 \to T$ bestaat, zdd $h(S^1 \times \{0\}) = K$. Hierin is $\mathring{D}^2$ de open eenheidsschijf: $\mathring{D}^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

opm. Een tubulaire omgeving definieert een dikke knoop (blz. 2-8), want zij $h: S^1 \times \mathring{D}^2 \to T$ een homeomorfisme en $h(S^1 \times \{0\}) = K$, $\quad h'(x,y) := h(x, \frac{y}{2})$, $h': S^1 \times D^2 \to T'$, $T' := h'(S^1 \times D^2)$
dan is T' een dikke knoop met kern K.

Stelling (3.2) Zij K een knoop in de $\mathbb{R}^3$, dan geldt:

$$K \text{ is tam} \iff K \text{ is locaal tam in } P, \ \forall P \in K.$$

bew. (3.2) De implicatie naar rechts volgt direkt uit de definities, die naar links is te vinden in:

Bing, R.H.: "Locally tame sets are tame." Ann. of Math. 59 (1954), 145-158
Moise, E.E.: "Affine structures in 3-manifolds V, The Triangulation theorem and Hauptvermutung" Ann of Math. 56 (1952), 96-1..
zie st. 5 en st. 6.
Moise, E.E.: "Geometric topology in dimensions 2 and 3", Springer GTM 47,
[illegible] "Hauptvermutung" and tame inbedding.

opm. Bij het bewijs van deze stelling wordt essentieel gebruik gemaakt van de "Triangulatie stellig" en van de "Hauptvermutung" voor 3-dimensionale manifolds. De eerste zegt dat iedere 3-dimensionale manifold een triangulatie heeft en de tweede houdt in dat als er een homeomorfisme tussen twee getrianguleerde 3 dimensionale manifolds bestaat, dan is er ook een stuksgewijs lineair isomorfisme tussen die twee manifolds.

Gevolg (3.3) k is tam $\Leftrightarrow$ k heeft een tubulaire omgeving.

bew. (3.3) Zij T een tubulaire omgeving van k, dan is T open in $\mathbb{R}^3$ en $K \subset T$, er is een homeomorfisme h, $h: S^1 \times B^2 \to T$, ~~het~~ $h(S^1 \times \{0\}) = K$. Nu is $g: \mathbb{R}^3 \to S^1 \times \mathbb{R}^2$, met $g(x,y,z) = (\exp(x), y, z)$, een continue afbeelding. Voor iedere $P \in K$ is er een $x_0 \in \mathbb{R}$, met $h(\exp(x_0), 0, 0) = P$, want $h(S^1 \times \{0,0\}) = K$.
Voor alle $x_0 \in \mathbb{R}$ is V open in $\mathbb{R}^3$, als $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_0 - x| < \pi$ en $y^2+z^2<1\}$
$g(V) = (S^1 \setminus \{-\exp(x_0)\}) \times \mathring{B}^2$ is open in $S^1 \times \mathring{D}^2$. h is een homeomorfisme, dus $h(g(V))$ is open in T, dus in $\mathbb{R}^3$, $U := h(g(V))$, U is open en $P \in U$, $(g|V): V \to g(V)$ is een homeomorfisme, dus $f := (g|V)^{-1} \cdot h^{-1}$ is een homeomorfisme van U naar V en $f(U \cap K) = V \cap L$, met $L := \{(x,0,0) \mid |x - x_0| \leq \pi\}$, L is een polygoon, dus K is locaal tam in P, volgens stelling (3.2) is K tam.
De omkering is op elementaire wijze te bewijzen, maar lastig in zijn technische details.

Def. Zij K een knoop in de $\mathbb{R}^3$. Definieer nu de verzamelingen $\mathcal{T}(K)$ en $\mathcal{W}(K)$ als volgt:

$\mathcal{T}(K) := \{P \in K \mid K$ is locaal tam in $P\}$ en $\mathcal{W}(K) := K \setminus \mathcal{T}(K)$.

opm. vlgs St. (3.2) is K tam $\Leftrightarrow$ $\mathcal{W}(K) = \emptyset$.

Lemma (3.4) $\mathcal{T}(K)$ is open in K.

bew (3.4) $P \in J(K)$, dan is K locaal tam in P, dus er zijn open verzamelingen U en V in de $\mathbb{R}^3$, $P \in U$ en er is een homeomorfisme $h: U \to V$, zdd $h(U \cap K) = V \cap L$, L een polygoon in $\mathbb{R}^3$, $P \in K \cap U$ is open in K en voor alle Q in $K \cap U$ is K locaal tam in Q (met dezelfde U, V, g en L als voor P), dus $P \in (U \cap K) \subset J(K)$, dus $J(K)$ is open in K.

Lemma (3.5) K_1 equivalent met $K_2 \Rightarrow J(K_1)$ is homeomorf met $J(K_2)$

bew. (3.5) Zij $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een homeomorfisme, met $h(K_1) = K_2$, dan is $h / J(K_1): J(K_1) \to J(K_2)$ een homeomorfisme, want: stel $P \in K_1$ en $h(P) = Q$ en $Q \in J(K_2)$, dan zijn er open verzamelingen U en V in $\mathbb{R}^3$ en er is een homeomorfisme $g: U \to V$ en een polygoon L zdd. $Q \in U$ en $g(U \cap K_2) = V \cap L$.
Nu is $W := h^{-1}(U)$ open in $\mathbb{R}^3$, $h(P) = Q \in U$, dus $P \in W$, $(g.h): W \to V$ is een homeomorfisme en $(g.h)(W \cap K_1) = g(U \cap K_2) = V \cap L$, dus $P \in J(K_1)$. Dus $J(K_1) \subset h^{-1}(J(K_2))$, evenzo is $J(K_2) \subset h(J(K_1))$, dus $h(J(K_1)) = J(K_2)$, dus $h / J(K_1)$ is welgedef van $J(K_1)$ op $J(K_2)$, h is een homeomorfisme, dus $h / J(K_1)$ is een homeomorfisme van $J(K_1)$ op $J(K_2)$.

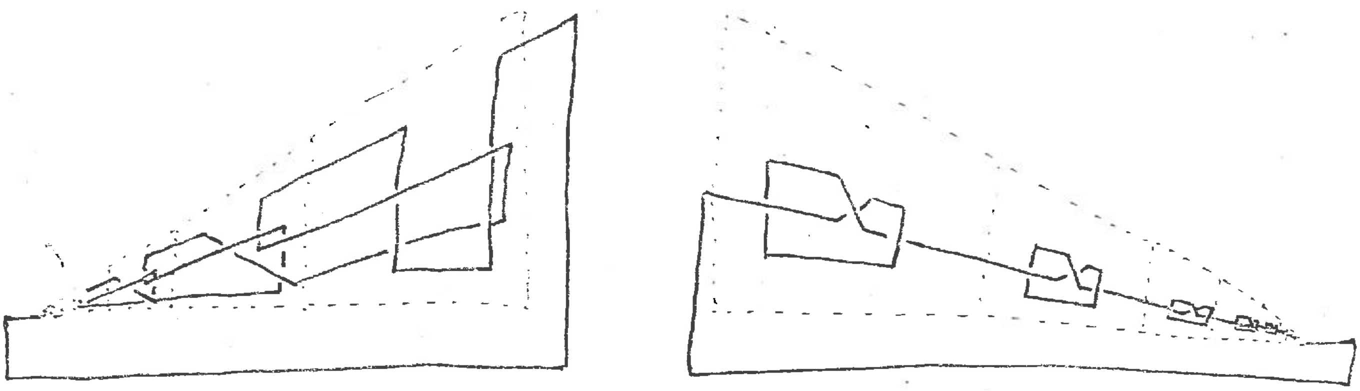
Voor de klasse van tamme knopen in de $\mathbb{R}^3$ bestaat een algemeen voorschrift om uit een projectie van een polygoon knoop, van hetzelfde type, af te lezen hoe een presentatie van de groep $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ er uit ziet. Dit is de zogenaamde Wirtinger presentatie (zie 57).
In deze scriptie wordt zo'n voorschrift voor een grotere klasse van knopen gegeven (zie 56).
Noemen we tamme knopen van de eerste klasse, dan zullen we nu knopen van de tweede en later knopen van de derde klasse definieren:

Def. Een knoop K in de $\mathbb{R}^3$ noemen we van de 2e klasse of aftelbaar wild, als K het type van een knoop K' heeft, zdd K' de aftelbare vereniging van rechte lijnstukken is.

opm. Onder een recht lijnstuk verstaan we een echt recht lijnstuk van P naar Q, met $P \neq Q$ of een verzameling bestaande uit één punt.

Alle tamme knopen zijn dus van de 2e klasse.

vb De twee wilde knopen op blz. 3-1 zijn van de 2e klasse:



opm. Als $K = \cup\{L_i \mid i \in I\}$, L_i een rechtlijnstuk en I een aftelbare indexverzameling, laat dan l_i een lijn door L_i zijn, als L_i een echt lijnstuk is, wordt l_i eenduidig door L_i bepaald. Laat nu alle L_i weg die deel zijn van een L_j met $i \neq j$. Definieer $\tilde{L}_i :=$ samenhangscomponent van L_i in $l_i \cap K$, dan is $\tilde{L}_i$ een gesloten en samenhangend deel van de lijn l_i, dus $\tilde{L}_i$ is een recht lijnstuk. $\tilde{L}_i$ bevat L_i.

$$K \subset \cup\{L_i \mid i \in I\} \subset \cup\{\tilde{L}_i \mid i \in I\} \subset \cup\{l_i \cap K \mid i \in I\} \subset K.$$

dus $K = \cup\{\tilde{L}_i \mid i \in I\}$.

We kunnen nog alle dubbele exemplaren $\tilde{L}_i$ weglaten, dan is

$\tilde{L}_i \neq \tilde{L}_j$ als $i \neq j$.

De $\tilde{L}_i$ zijn de "maximale" rechte lijnstukken van K, we mogen dus veronderstellen dat $K = \cup\{L_i \mid i \in I\}$, $L_i = \tilde{L}_i$ is een recht lijnstuk en $L_i \neq L_j$ als $i \neq j$ en I is aftelbaar.

We hebben dan de volgende eigenschappen:

Eigenschap (3.6) Als $L_i \cap L_j$ meer dan één punt bevat dan is $L_i = L_j$

bew (3.6) Als $L_i \cap L_j$ meer dan één punt bevat, zeg P en Q, $P \neq Q$. dan is de lijn door P en Q gelijk aan l_i en aan l_j, L_i en L_j zijn samenhangend, $L_i \cap L_j \neq \emptyset$, dus $L_i \cup L_j$ is samenhangend.

$L_j \subset (L_i \cup L_j) \subset (l_i \cap K) \cup (l_j \cap K) = (l \cap K) = (l_j \cap K)$, dus $(L_i \cup L_j) \subset \tilde{L}_j$

dus $L_i \subset \tilde{L}_j = L_j$, evenzo is $L_j \subset L_i$, dus $L_i = L_j$.

<u>Eigenschap</u> (3.7) Zij $\mathring{L} := L \setminus \{$eindpunten van $L\}$, L een lijnstuk $L \subset K$, dan is $\mathring{L}$ relatief open in K.

<u>bew.</u>(3.7) Als $L = \{P\}$, dan is $\mathring{L} = \phi$, dus relatief open in K.
Anders is L een echt lijnstuk met eindpunten P en Q,
$P \neq Q$, Nu is L een gesloten samenhangende deelverzameling
van K en $L \setminus \{P, Q\}$ is samenhangend, $K \cong S^1$, de enige
gesloten samenhangende deelverzamelingen van S^1, die meer dan
één punt bevatten, zijn de gesloten boogsegmenten, indien de
eindpunten van het een boogsegment worden weggelaten, krijgen
we een open deelverzameling in S^1, dus $\mathring{L}$ is open in K. ⊠

<u>Eigenschap</u> (3.8) Als $L_i \cap L_j$ uit één punt P bestaat, dan is
P eindpunt van L_i en van L_j.

<u>bew.</u> (3.8) Stel P is geen eindpunt van L_i, $P \in L_i$, dus $P \in \mathring{L}_i$
Als $L_j = \{Q\}$, dan geldt: $Q = P$, $L_j = \{P\} \subset L_i$, dus
$L_j \subset L_i$, maar dan is $i = j$ (L_j is een maximaal lijnstuk),
dus $\phi = \mathring{L}_j = \mathring{L}_i \ni P$, tegenspraak. Dus L_j is een echt
lijnstuk, dan kunnen we een rij punten $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ in L_j kiezen,
met $P_n \neq P$ en P_n convergeert naar P, $P \in \mathring{L}_i$ is open in K
vlgs. (3.7), dus er is een n, $\forall m \geq n$ $P_m \in \mathring{L}_i$, dus $P_m \in L_j \cap \mathring{L}_i \subset L_j \cap L_i = \{P\}$
dus $P_m = P$, tegenspraak, dus P is een eindpunt van L_i.
Evenzo is P een eindpunt van L_j. ⊠

<u>Eigenschap</u> (3.9) $i \neq j \neq k \Rightarrow L_i \cap L_j \cap L_k = \phi$

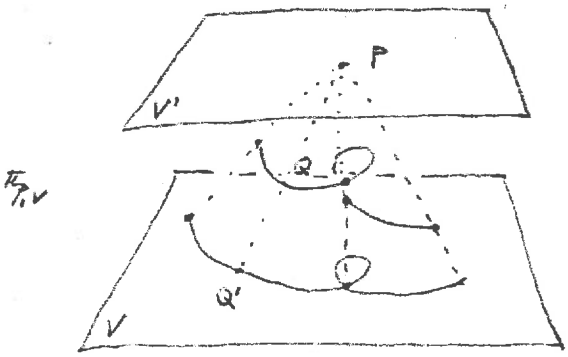
<u>bew.</u>(3.9) Stel $i \neq j \neq k$ en $L_i \cap L_j \cap L_k \neq \phi$. Als $L_i \cap L_j \cap L_k$ meer dan
één punt bevat, dan bevat $L_i \cap L_j$ ook meer dan één
punt, vlgs. (3.6) is nu $L_i = L_j$, dus $i = j$, tegenspraak.
Dus $L_i \cap L_j \cap L_k$ bevat precies één punt, zeg P. Nu bevatten
$L_i \cap L_j$, $L_j \cap L_k$, $L_j \cap L_k$ precies één punt, (weer met (3.6)).
Vlgs (3.8) is nu P eindpunt van L_i, L_j en L_k, $T := L_i \cup L_j \cup L_k$,
$T \setminus \{P\}$ heeft nu drie samenhangscomponenten, terwijl T zelf
samenhangend is. Maar $T \subset K$ en K is homeomorf met S^1 en
S^1 bevat niet zulke deelverzamelingen, tegenspraak.
Dus $L_i \cap L_j \cap L_k = \phi$. ⊠

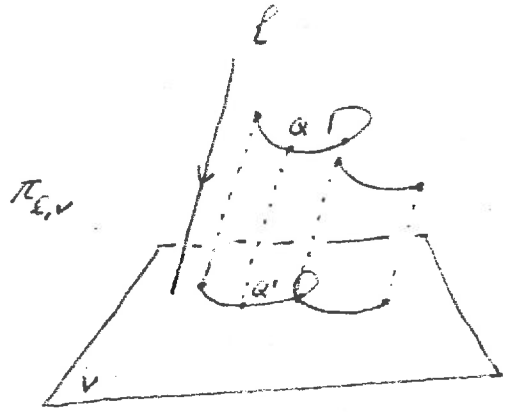
§4 Reguliere projecties

We hebben al gezien hoe het type van een tamme knoop gegeven kan worden: nl door een projectie op een vlak (zie opm. blz 1-4).

Zij P een punt en V een vlak in de $\mathbb{R}^3$, $P \notin V$, V' het vlak door P en evenwijdig met V, laat dan $\pi_{P,V}: (\mathbb{R}^3 \setminus V') \to V$ de projectie vanuit P op V zijn, gedefinieerd door: $Q \in (\mathbb{R}^3 \setminus V')$, dan is $Q \neq P$, want $P \in V'$, zij l de lijn door P en Q, dan is l niet evenwijdig met V, anders zou $l \subset V'$ en $Q \in l \subset V'$, maar $Q \notin V'$, dus l snijdt V in precies één punt: Q', $\pi_{P,V}(Q) := Q'$.

We kunnen ook "P in oneindig" nemen, dan wordt de projectie gegeven door een vlak V en een lijn l in de $\mathbb{R}^3$, $l \cap V$ is één punt, $\pi_{l,V}: \mathbb{R}^3 \to V$ is dan de projectie op V in de richting van l.





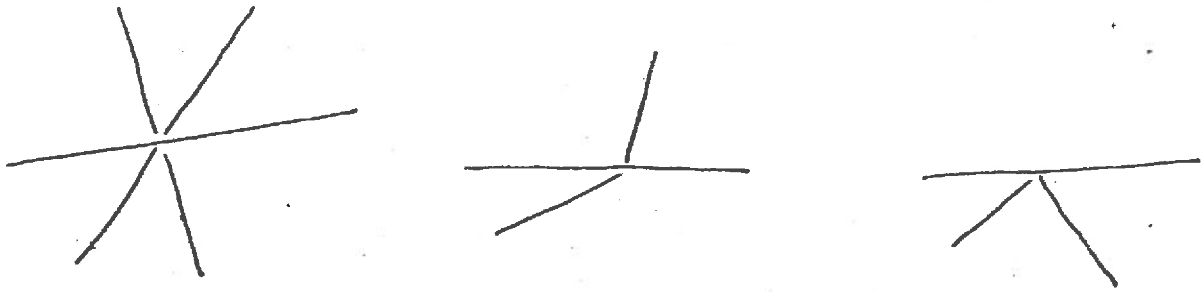
Zij nu K een knoop en $K = \cup\{l_i \mid i \in I\}$, I aftelbaar en l_i een recht lijnstuk, l_i zijn weer de maximale rechte lijnstukken van K, zoals op blz. 3-5.

Def Zij $\pi_{l,V}: \mathbb{R}^3 \to V$ een projectie en K een knoop, bestaande uit aftelbaar veel (maximale) rechte lijnstukken l_i, $i \in I$.
Dan heet π regulier mbt K ($\pi := \pi_{l,V}$) als:

(i) voor iedere $x \in V$: $\pi^{-1}(x) \cap K$ hoogstens twee punten bevat.

(ii) als $x \in V$ en $\pi^{-1}(x) \cap K = \{P_1, P_2\}$, $P_1 \neq P_2$, dan is P_1 noch P_2 een eindpunt van een l_i, $i \in I$.

opm. de voorwaarden (i) en (ii) zorgen ervoor dat bij een reguliere projectie de volgende figuren niet kunnen ontstaan:



<u>Stelling</u> (4.1) Zij k een knoop, k is de aftelbare vereniging van (maximale) rechte lijnstukken l_i, $i \in I$, dan is er een rechte l en een vlak V, $l \cap V$ is één punt, met $\pi_{V,l}$ is regulier mbt k.

<u>Bew:</u> (4.1) Zij $G(1,3)$ de Grassmann manifold van lijnen in de $\mathbb{R}^3$, dan is $G(1,3)$ een 4 dimensionale manifold. Met de zg. Plücker coördinaten kan $G(1,3)$ geparametriseerd worden door een open deel van een niet singulier kwadratisch hyperoppervlak in $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$.

Zij l, m, n $G(1,3)$ en

$$Q(l,m,n) := \{ l' \in G(1,3) \mid l' \cap l \neq \emptyset,\ l' \cap m \neq \emptyset \text{ en } l' \cap n \neq \emptyset \}$$

$$\tilde{Q}(l,m,n) := \{ l' \in G(1,3) \mid \exists\, l'' \in Q(l,m,n) : l'' \,//\, l' \}$$

Stel $l, m, n \in G(1,3)$ zijn onderling verschillend.
Als l, m en n niet alle door één punt gaan, dan is $\tilde{Q}(l,m,n)$ een gesloten 3 dimensionale deelverz. van $G(1,3)$.

Zij $l \in G(1,3)$ en $P \in \mathbb{R}^3$ en $P \notin l$, definieer dan

$$\tilde{V}(l,P) := \{ l' \in G(1,3) \mid l' \text{ evenwijdig met het vlak door } P \text{ en } l \}$$

$$\tilde{l} := \{ l' \in G(1,3) \mid l' \,//\, l \}$$

$\tilde{V}(l,P)$ en $\tilde{l}$ zijn gesloten deelverzamelingen van $G(1,3)$ van de dimensies 3 resp. 2.
Omdat $G(1,3)$ 4 dimensionaal is, zijn $\tilde{Q}(l,m,n)$, $\tilde{V}(l,P)$ en $\tilde{l}$, zoals hierboven, dunne verzamelingen in $G(1,3)$.

$k = \cup \{ l_i \mid i \in I \}$, laat $\{ a_t \mid t \in \mathbb{N} \}$ de collectie eindpunten van de l_i'en zijn en l_i een lijn door l_i.

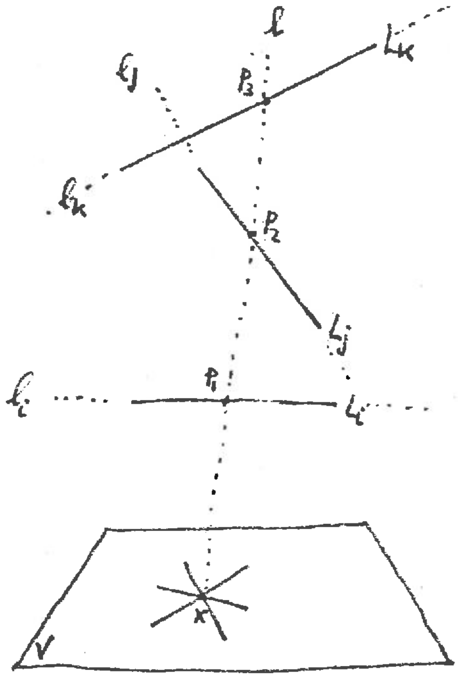
$\mathcal{F} := \{ \tilde{Q}(l_i, l_j, l_k) \mid i,j,k \in I,\ l_i, l_j, l_k$ zijn onderling verschillend en gaan niet alle door één punt$\}$

$\cup \{ \tilde{V}(l_i, Q_t) \mid i \in I,\ t \in N,\ Q_t \notin l_i \} \cup \{ \tilde{l_i} \mid i \in I \}$.

Nu is $\mathcal{F}$ een aftelbare collectie van gesloten en dunne verzamelingen in $G(1,3)$. $G(1,3)$ is locaal compact, dus een Bairruimte, dus $\cup \mathcal{F}$ is dun, i.h.b. is $\cup \mathcal{F} \neq G(1,3)$.

Kies een $l \in G(1,3) \setminus \cup \mathcal{F}$, en een vlak V, niet evenwijdig met l, dan is π, met $\pi = \pi_{l,V}$, regulier mbt K.

(i) $\pi^{-1}(x) \cap K$ bestaat uit hoogstens 2 punten, anders zijn er $P_1, P_2, P_3 \in \pi^{-1}(x) \cap K$, met $P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_1$, er zijn $i,j,k \in I$ met $P_1 \in l_i$, $P_2 \in l_j$, $P_3 \in l_k$.



$l' := \pi^{-1}(x)$ is een lijn in $\mathbb{R}^3$

$l \neq l_i$, anders is $l = l_i$, er is een $t \in N$ met $Q_t \notin l_i$, dus $l \in \tilde{V}(l_i, Q_t) \in \mathcal{F}$, tegenspraak.

Evenzo is $l' \neq l_j$ en $l' \neq l_k$.

Dus $l' \cap l_i = \{P_1\}$, $l' \cap l_j = \{P_2\}$ en $l' \cap l_k = \{P_3\}$.

Als $l_i = l_j$ dan is $\{P_1\} = l' \cap l_i = l' \cap l_j = \{P_2\}$, dus $P_1 = P_2$, tegenspraak, dus $l_i \neq l_j$

Evenzo is $l_i \neq l_k$ en $l_j \neq l_k$.

a) Als l_i, l_j en l_k door één punt P gaan, dan is $P \notin l'$, anders is $P \in l' \cap l_i = \{P_1\}$ en $P \in l' \cap l_j = \{P_2\}$, dus $P_1 = P_2$, tegenspraak.

dus l_i, l_j en l_k liggen in het vlak door l' en P.

Eén van de eindpunten Q_t van l_i ligt niet op l_j, dus

l' ligt in het vlak door P en l' = het vlak door Q_t en l_j

$l \parallel l'$, dus $l \in \tilde{V}(l_j, Q_t) \in \mathcal{F}$, tegenspraak. Dus:

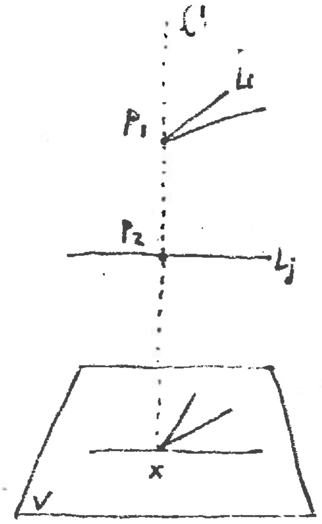
b) l_i, l_j en l_k gaan niet alle door één punt en zijn onderling verschillend, $P_1 \in l' \cap l_i \neq \emptyset$, $P_2 \in l' \cap l_j \neq \emptyset$, $P_3 \in l' \cap l_k \neq \emptyset$,

dus $l' \in Q(l_i, l_j, l_k)$ en $l \parallel l'$, dus

$l \in \tilde{Q}(l_i, l_j, l_k) \in \mathcal{F}$, tegenspraak.

hiermee is (i) bewezen

(ii) $\pi^{-1}(x) \cap k = \{P_1, P_2\}$ en $P_1 \neq P_2$



Stel P_1 is eindpunt van een l_i, $i \in I$

verder is er een $j \in I$ met $P_2 \in l_j$.

$l' := \pi^{-1}(x)$, l' is een rechte lijn, $l' \parallel l$; P_1 is eindpunt van l_i,

dus $\exists t \in N$: $P_1 = Q_t$; als $Q_t \in \bar{l}_j$, dan is

$P_1 = Q_t \in \bar{l}_j$ en $P_2 \in l_j \subset \bar{l}_j$ en $P_1 \neq P_2$ dus

$\bar{l}_j = l'$, want l' is de lijn door P_1 en P_2,

dus $l \parallel l' = \bar{l}_j$, dus $l \in \tilde{l}_j \in \mathcal{F}$, tegenspraak, dus $Q_t \notin \bar{l}_j$.

V het vlak door Q_t en $\bar{l}_j$, l' is de lijn door P_1 en P_2,

$P_1 = Q_t \in V$ en $P_2 \in l_j \subset \bar{l}_j \subset V$, dus $l' \subset V$, $l \parallel l'$, dus

$l \in \tilde{V}(\bar{l}_j, Q_t) \in \mathcal{F}$, tegenspraak.

Dus P_1 is geen eindpunt van een l_i, evenzo voor P_2.

Hiermee is (ii) bewezen.

Dus $\pi_{l,V}$ is regulier mbt k.

Nu een wat technische definitie:

Def. Een knoop k heet van de 3^e klasse, als er een knoop k' bestaat, van hetzelfde type als k (blz 1-2), zodat er is een projectie $\pi_{l,V}: \mathbb{R}^3 \to V$, $\pi := \pi_{l,V}$, waarvoor geldt:

(i) $\pi^{-1}(x) \cap k$ heeft hoogstens twee punten, voor iedere $x \in V$.

(ii) a) de verzameling D, $D := \{x \in V \mid \pi^{-1}(x) \cap k$ heeft 2 punten$\}$ is aftelbaar

b) voor iedere $x \in D$ is er een $\varepsilon > 0$ en twee lijnen l_1 en l_2 met $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap k = \pi^{-1}(U_\varepsilon) \cap (l_1 \cup l_2)$ en $\pi(l_1) \cap \pi(l_2) = \{x\}$

$U_\varepsilon(x) := \{y \in V \mid |x-y| < \varepsilon\}$

Def. $\mathcal{K}_1 :=$ de collectie van alle tamme knopen in de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{K}_2 :=$ de collectie van alle knopen van de 2^e klasse in de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{K}_3 :=$ de collectie van alle knopen van de 3^e klasse in de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{K} :=$ de collectie van alle knopen in de $\mathbb{R}^3$.

Stelling (4.2) $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_3 \subseteq \mathcal{K}$

<u>bew.</u> (4.2) De laatste inclusie is triviaal, de eerste ook. Bewijzen we nu de middelste inclusie.

Zij $k \in \mathcal{K}_2$, dan mogen we, na een eventueel homeomorfisme en een affiene transformatie, veronderstellen dat:

$k = \cup\{l_i \mid i \in I\}$, l_i is een (maximaal) recht lijnstuk, I is aftelbaar, l = de z-as en V = het xy-vlak, $\pi := \pi_{l,V}$, π is regulier mbt k (met stelling 4-1).

(i) π is regulier mbt k, dus $\pi^{-1}(x) \cap k$ heeft hoogstens twee punten, voor alle $x \in V$.

(ii) a) $D := \{ x \in V \mid \pi^{-1}(x) \cap k$ heeft twee verschillende punten$\}$.

zij $I_x := \{ i \in I \mid \pi^{-1}(x) \cap l_i \neq \emptyset\}$, stel $x \in D$, dan is $|I_x| \geq 2$, want: $x \in D$ dus $\exists P_1, P_2$ met $\pi^{-1}(x) \cap k = \{P_1, P_2\}$ en $P_1 \neq P_2$, dus er is een $i, j \in I$ met $P_1 \in l_i$ en $P_2 \in l_j$, nu is $i \neq j$, anders is $l_j \subset \pi^{-1}(x) \cap k$, dus dan bevat $\pi^{-1}(x) \cap k$ oneindig veel ptn. in tegenspraak met de regulariteit van π, dus $i \neq j$, dus $|I_x| \geq 2$.

π is regulier mbt k, dus als $x \in D$, dan is $\pi^{-1}(x) \cap k = \{P_1, P_2\}$, $P_1 \neq P_2$, $P_1 \in l_i$, $P_2 \in l_j$, P_1 geen eindpt. van een l_k, evenzo voor P_2. dus $P_1 \in \mathring{l}_i$ en $P_2 \in \mathring{l}_j$, nu is $I_x = \{i, j\}$, stel nl dat voor $k \in I$, $l_k \cap \pi^{-1}(x) \neq \emptyset$ en $k \neq i$ en $k \neq j$, dan is $P_1 \in l_k \cap \pi^{-1}(x)$ of $P_2 \in l_k \cap \pi^{-1}(x)$; als $P_1 \in l_k \cap \pi^{-1}(x)$, dan is $P_1 \in l_k \cap l_i$, volgens de eigenschappen (3.6) en (3.8) is P_1 een eindpunt van l_k en l_i (want $i \neq k$), dus een eindpunt van l_i, tegenspraak; evenzo leidt $P_2 \in l_k \cap \pi^{-1}(x)$ tot een tegenspraak, dus $I_x = \{i, j\}$, $i \neq j$.

Stel $x, y \in D$ en $x \neq y$ en $I_x = I_y$, volgens bovenstaande is $\{i, j\} = I_x = I_y$, $i \neq j$, maar dan is $\pi(l_i) \cap \pi(l_j)$ een recht lijnstuk in V, zij Q een eindpunt van $\pi(l_i) \cap \pi(l_j)$ en $Q_1 \in l_i$ en $Q_2 \in l_j$ en $\pi(Q_1) = Q = \pi(Q_2)$, en zij P het andere eindpunt van $\pi(l_i) \cap \pi(l_j)$ en $P_1 \in l_i$ en $P_2 \in l_j$ en $\pi(P_1) = P = \pi(P_2)$. Als $P_1 = P_2$ en $Q_1 = Q_2$, dan is het lijnstuk P_1Q_1 een deel van zowel l_i als van l_j, maar l_i en l_j zijn maximale lijnstukken, dus dan zou $l_i = l_j$, maar $i \neq j$, dus $P_1 \neq P_2$ of $Q_1 \neq Q_2$. Stel $P_1 \neq P_2$, dan is P_1 een eindpunt van l_i of P_2 is een eindpunt van l_j, dus P_1 of P_2 is een hoekpunt van k, terwijl $\pi^{-1}(P) \cap k = \{P_1, P_2\}$, $P_1 \neq P_2$, dit is in tegenspraak met de

regulariteit van π, evenzo leidt $Q_1 \neq Q_2$ tot een tegenspraak.
Dus $D \to \mathcal{P}_2(I)$, gedefinieerd door $x \mapsto I_x$, en waarin $\mathcal{P}_2(I) := \{I' \mid I' \subset I$ en $|I'| = 2\}$, is een injectieve afbeelding.
I is aftelbaar, dus $\mathcal{P}_2(I)$ en D zijn aftelbaar.

b) We hebben al gezien dat $\pi^{-1}(x) \cap K = \{P_1, P_2\}$, met $P_1 \neq P_2$, als $x \in D$ en $P_1 \in \mathring{l}_i$, $P_2 \in \mathring{l}_j$, met $i,j \in I$ en $i \neq j$ en $I_x = \{i,j\}$.
Zij $F := K \setminus (\mathring{l}_i \cup \mathring{l}_j)$, dan is F gesloten in K (volgens 3.7), K is compact, dus F ook, dus $\pi(F)$ is compact, dus gesloten in V.
$x \notin \pi(F)$, anders is er een $P_3 \in K \setminus (\mathring{l}_i \cup \mathring{l}_j)$, met $x = \pi(P_3)$, dus $P_3 \in \pi^{-1}(x) \cap K = \{P_1, P_2\} \subset \mathring{l}_i \cup \mathring{l}_j$, tegenspraak. Dus $x \notin \pi(F)$ en $\pi(F)$ is gesloten in V, dus $\exists \delta > 0$ zodat $U_\delta(x) \cap \pi(F) = \emptyset$.
Verder is $P_1 \in \mathring{l}_i$ en $\pi(l_i)$ een echt lijnstuk in V, $\pi(P_1) = x$, dus x is geen eindpunt van $\pi(l_i)$, dus er is een $\varepsilon_1 > 0$, zodat $U_{\varepsilon_1}(x) \cap \pi(l_i) = U_{\varepsilon_1}(x) \cap l_1$, waarin l_1 de lijn door l_i is. Evenzo is er een $\varepsilon_2 > 0$, zodat $U_{\varepsilon_2}(x) \cap \pi(l_j) = U_{\varepsilon_2}(x) \cap \pi(l_2)$, waarin l_2 de lijn door l_j is.
Er geldt nu $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap K = \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$, als $\varepsilon := \min\{\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ neemt:
stel $P \in K$ en $\pi(P) = y \in U_\varepsilon(x)$, dan is $|y - x| < \varepsilon \leq \delta$, dus $y \in U_\delta(x)$, dus $y \notin \pi(F)$.
$P \in K$, dus er is een $k \in I$, met $P \in l_k$, als $k \neq i,j$, dan is $P \in K \setminus (\mathring{l}_i \cup \mathring{l}_j) = F$, dus $y = \pi(P) \in \pi(F)$, tegenspraak, dus $k = i$ of $k = j$, dus $P \in (l_i \cup l_j) \subset (l_1 \cup l_2)$, $\pi(P) = y$ en $|x - y| < \varepsilon$, dus $P \in \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$.
Dus $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap K \subset \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$.

Omgekeerd: stel $P \in \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$, dan is $y := \pi(P) \in U_\varepsilon(x)$ en $P \in l_1$ of $P \in l_2$.
stel $P \in l_1$, dan is $y \in U_\varepsilon(x) \cap \pi(l_1) \subset U_{\varepsilon_1}(x) \cap \pi(l_1) = U_{\varepsilon_1}(x) \cap \pi(l_i)$, dus $y \in U_\varepsilon(x) \cap \pi(l_i)$, dus $\exists P' \in l_i$ met $\pi(P') = y$, als $P \neq P'$ dan is $l_i \subset \pi^{-1}(y) \cap K$ in tegenspraak met de regulariteit (i) van π, dus $P = P' \in l_i \subset K$, dus $P \in \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap K$, evenzo als $P \in l_2$, dus $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2) \subset \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap K$.
Dus $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap K = \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$.
Hiermee is de tweede inclusie bewezen.

opm. We zullen in §8 zien dat de inclusies van stelling 4.2 echte inclusies zijn, dus:

$$\mathcal{K}_1 \subsetneq \mathcal{K}_2 \subsetneq \mathcal{K}_3 \subsetneq \mathcal{K}$$

§5 De fundamentaal groep

We veronderstellen de begrippen en stellingen, die samenhangen met de eerste fundamentaalgroep $\pi_1(X,x_0)$ van een topologische ruimte, die gedefinieerd is als de collectie lussen met basispunt x_0, modulo homotopie, bekend.
In deze paragraaf zullen we een samenvatting geven van een combinatorische manier om de π_1 te berekenen d.m.v. een geschikte overdekking van X en het bijbehorende Čechcomplex.

Zie: Kan, D.M.: "A combinatorial definition of homotopy groups," Ann. Math., 67 (1957), 282-312.

De theorie van de fundamentaalgroep is ook in te voeren in de categorie der abstracte simpliciaal complexen.
Een <u>abstract simpliciaal complex</u> (asc) is een tweetal (Σ, d), met $\Sigma = \cup\{\Sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\Sigma^m \cap \Sigma^n = \phi$ als $m \neq n$ en d is een rij afbeeldingen $\{d_i^n\}_{\substack{0\le i\le n\\ n\in\mathbb{N}}}$ zdd

$$d_i^n : \Sigma^n \to \Sigma^{n-1} \quad \text{en} \quad \Sigma^n \xrightarrow{d_j^n} \Sigma^{n-1} \xrightarrow{d_i^{n}} \Sigma^{n-2}$$

$$d_i^{n-1} \cdot d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n \quad \text{voor} \quad 0 \le i < j \le n$$

De $\sigma \in \Sigma^n$ heten (abstracte) n-simplices. De boven index n van d_i^n wordt meestal weggelaten: d_i i.p.v. d_i^n.
Als $\Sigma^n \neq \phi$ en $\Sigma^k = \phi$ voor $k > n$, dan heet Σ een n-dimensionaal asc.
Een georiënteerde ribbe a (of georiënteerd 1-simplex) in Σ, is een paar (σ, d_i) met $\sigma \in \Sigma^1$ en $i=0$ of $i=1$,
$\alpha(a) := d_i\sigma$ heet het beginpunt van a en
$\omega(a) := d_{1-i}(\sigma)$ heet het eindpunt van a,
(σ, d_{1-i}) heet de reciproke van a, notatie a^{-1}.

Een weg w van x naar y in Σ; $x,y \in \Sigma^0$, is een rij georiënteerde ribben $(a_1,\dots,a_n)$, zdd $\omega(a_i) = \alpha(a_{i+1})$, $1 \le i < n$ en $\alpha(a_1) = x$ en $\omega(a_n) = y$. $\alpha(w) := x$, $\omega(w) := y$

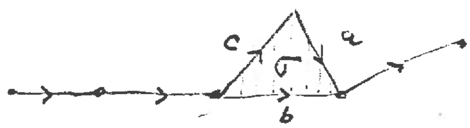
Een weg w in Σ heet een lus met basispunt x, als $\alpha(w) = x = \omega(w)$.

Laat $\Omega(\Sigma,x) := \{w \mid w \text{ een lus in } \Sigma \text{ met basispunt } x\}$.

Σ heet samenhangend als $\forall x,y \in \Sigma^0$ er een weg w van x naar y in Σ is.

Een deformatie van de eerste soort van een weg w, $w=(a_1,\dots,a_n)$ is het inlassen van een opvolgend ribbenpaar (b,b^{-1})
$w \mapsto w' := (a_1,\dots,a_i,b,b^{-1},a_{i+1},\dots,a_n)$, zdd w' weer een weg is, of het schrappen van een opvolgend ribbenpaar (b,b^{-1}).

Een deformatie van de tweede soort van een weg $(b_1,\dots,b_n)$ bestaat uit het vervangen van een ribbe b_i door (c,a), waarbij voor zekere $\sigma \in \Sigma^2$ geldt: $(d_2\sigma, d_1) = c$, $(d_0\sigma, d_1) = a$ en $(d_1\sigma, d_1) = b$,



of de omgekeerde bewerking.

Voor twee wegen w en w', die uit elkaar ontstaan door een serie deformaties (van de 1ste of 2e soort) schrijven we $w \sim w'$. Verder geldt: $w \sim w' \Rightarrow \alpha(w) = \alpha(w')$ en $\omega(w) = \omega(w')$.

Met $[w]$ geven we de equivalentieklasse van w mbt $\sim$ aan.
Zijn w_1 en w_2 twee wegen met $\omega(w_1) = \alpha(w_2)$, $w_1 = (a_1,\dots,a_k)$, $w_2 = (b_1,\dots,b_l)$, dan is $w_1 \cdot w_2 := (a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_l)$ weer een weg
$\alpha(w_1\cdot w_2) = \alpha(w_1)$ en $\omega(w_1 \cdot w_2) = \omega(w_2)$.

Ihb geldt voor lussen w_1 en w_2 uit $\Omega(\Sigma,x)$ dat $w_1 \cdot w_2 \in \Omega(\Sigma,x)$
met 0_x wordt de lege lus aangeduid, $0_x \cdot w = w = w \cdot 0_x$, als $w \in \Omega(\Sigma,x)$
Er geldt: $w_1 \sim w_1'$ en $w_2 \sim w_2'$ $\Rightarrow$ $w_1 \cdot w_2 \sim w_1' \cdot w_2'$ voor $w_1, w_1', w_2, w_2' \in \Omega(\Sigma,x)$
Dus het produkt is ook gedefinieerd modulo $\sim$. $[w_1][w_2] = [w_1 \cdot w_2]$

$$\pi_1(\Sigma, x) := \{ [w] \mid w \in \Omega(\Sigma, x)\}$$

$(\pi_1(\Sigma,x), \cdot)$ is een groep en wordt de (eerste) fundamentaal groep van het ase Σ met basispunt x, genoemd

Als Σ samenhangend is, dan geldt $\pi_1(\Sigma,x) \cong \pi_1(\Sigma,y)$ voor $x,y \in \Sigma^0$. om deze reden schrijven we $\pi_1(\Sigma)$ ipv $\pi_1(\Sigma,x)$, als Σ samenhangend is.

Een presentatie van de groep $\pi_1(\Sigma)$, Σ een samenhangend ase, kan alsvolgt gegeven worden:

w een weg, $w = (a_1, \dots, a_n)$, dan is $l(w) := n$, $l(w)$ heet de lengte van de weg w. Voor vaste $x \in \Sigma^0$ definieren we:

$$d(y) := \min \{ l(w) \mid w \text{ een weg van } x \text{ naar } y\}$$

d is nu welgedefinieerd op Σ, omdat Σ samenhangend is.

Er geldt $d(y) = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Kies nu voor iedere $y \in \Sigma^0$, $y \neq x$, een ribbe b_y, met

$$d(\alpha(b_y)) = d(y) - 1 \quad \text{en} \quad \omega(b_y) = y$$

Laat B het 1-dimensionale subcomplex van Σ zijn, dat bij deze ribben $b_y, y \in \Sigma^0 \setminus \{x\}$ hoort. B is een zgn maximale boom in Σ

Laat $F(A)$ de vrije groep zijn, voortgebracht door A, $A := \Sigma^1 \setminus B^1$.

N de ondergroep van $F(A)$, die wordt voortgebracht als normaaldeler door de woorden $\tilde{c}_1^{-1} \tilde{c}_2 \tilde{c}_0$, waarin $c_i = d_i \sigma$, $\sigma \in \Sigma^2$

en $\tilde{c} := \begin{cases} 1 & \text{als } c \in B' \\ c & \text{als } c \notin B' \end{cases}$

Dan is N per definitie een normaaldeler van $F(A)$

Er geldt nu: $\pi_1(\Sigma) \cong F(A)/N$ ofwel $\pi_1(\Sigma)$ heeft als groep de presentatie: $\langle A \mid \widetilde{d_1\sigma} = \widetilde{d_2\sigma}\, \widetilde{d_0\sigma}, \sigma \in \Sigma^2 \rangle$

Laat X een boogsamenhangende en lokaal boogsamenhangende topologische ruimte zijn en $\mathcal{U}$ een open overdekking, $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i \in I\}$, U_i samenhangend.

Zij $\Sigma_{\mathcal{U}}$ het asc gedefinieerd door:

$\Sigma^0_{\mathcal{U}} := I$ de 0-simplexen.

Zij R een relatie op de collectie:

$\{(i,j,C) \mid i,j \in I,\ C$ een samenhangscomponent van $U_i \cap U_j\}$

zdd: $\forall i,j \in I,\ i \neq j$, C een samenhangscomponent van $U_i \cap U_j$ dan $R(i,j,C)$ of $R(j,i,C)$.

$\Sigma^1_{\mathcal{U}} := \{(i,j,C) \mid i,j \in I$, C is een samenhangscomponent van $U_i \cap U_j$ en $R(i,j,C)\}$

$\Sigma^2_{\mathcal{U}} := \{(i_0,i_1,i_2,C) \mid i_0,i_1,i_2 \in I$, C een samenhangscomponent van $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}$ en $R(i_0,i_1,C_2)$ en $R(i_0,i_2,C_1)$ en $R(i_1,i_2,C_0)\}$

waarin C_0 de samenhangscomponent van C in $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ is en en evenzo voor C_1 in $U_{i_0} \cap U_{i_2}$ en voor C_2 in $U_{i_0} \cap U_{i_1}$

$d_0(i_0,i_1,i_2,C) := (i_1,i_2,C_0)$, $d_1(i_0,i_1,i_2,C) := (i_0,i_2,C_1)$

en $d_2(i_0,i_1,i_2,C) := (i_0,i_1,C_2)$

$d_0(i,j,C) := j$ en $d_1(i,j,C) := i$

Hiermee is $(\Sigma_{\mathcal{U}}, d)$ een asc, het wordt het Čechcomplex of de nerf van $\mathcal{U}$ genoemd.

opm. De relatie R is ingevoerd om bij bepaalde bewijzen $\Sigma_{\mathcal{U}}$ zo klein mogelijk te houden, ipv steeds twee 1-simplexen (i,j,C) en (j,i,C) te nemen, $i \neq j$, kan mbv $R(i,j,C)$ bv (i,j,C) worden gekozen en (j,i,C) worden weggelaten.

De relatie R kan bv. worden gedefinieerd, als de indexverz. I partieel geordend wordt door $<$, en er geldt: $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $i<j$ of $j<i$, neem dan: $R(i,j,C) :\Leftrightarrow i<j$.

In dit geval is $R(i,j,C)$ onafhankelijk van C.

Stel (Σ_1, d) en (Σ_2, d') zijn twee asc'n en $f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ is een afbeelding zdd $f_1(\Sigma_1^n) \subset \Sigma_2^n$ en $f d_i = d'_i f$, dan heet f een simpliciale afbeelding (of een simpliciaal morfisme)

Stel $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\partial})$ en (Σ, ∂) zijn twee ase'n en $\pi : (\tilde{\Sigma}, \tilde{\partial}) \to (\Sigma, \partial)$ een simpliciale afbeelding, dan heet π een overdekking (van ase'n) als voor iedere $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}^n$ en $\tau \in \Sigma^{n+1}$ en $\partial_i \tau = \pi(\tilde{\sigma})$ er precies één $\tilde{\tau} \in \tilde{\Sigma}^{n+1}$ is zdd $\tilde{\partial}_i \tilde{\tau} = \tilde{\sigma}$.

$(\tilde{\Sigma}, \tilde{\partial}) \xrightarrow{\pi} (\Sigma, \partial)$ een overdekking, en Σ samenhangend, heet de universele overdekking, als $\tilde{\Sigma}$ samenhangend is, en als voor iedere overdekking $(\Sigma_1, \partial') \xrightarrow{\pi_1} (\Sigma, \partial)$ er precies één simpliciale afbeelding $\varphi : (\tilde{\Sigma}, \tilde{\partial}) \to (\Sigma_1, \partial')$ is zdd $\pi_1 \varphi = \pi$ (zo'n φ heet een morfisme van overdekkingen van (Σ, ∂)). Er geldt: de universele overdekking is uniek op isomorfismen van overdekkingen van (Σ, ∂) na, en deze bestaat voor elk samenhangend ase. (Σ, ∂).

$Aut(\tilde{\Sigma}/\Sigma) := \{\varphi \mid \varphi : (\tilde{\Sigma}, \tilde{\partial}) \to (\Sigma, \partial)$ een simpliciale afb. $, \pi\varphi = \pi\}$ is een groep, met de compositie van afbeeldingen als groepsoperatie. Als $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ de universele overdekking is, dan geldt $\pi_1(\Sigma) \cong Aut(\tilde{\Sigma}/\Sigma)$.

Zij $\underline{O}(\Sigma)$ de categorie van simpliciale overdekkingen van Σ, met morfismen van overdekkingen van Σ en $\underline{O}(X)$ de categorie van (topologische) overdekkingen van X, met morfismen van overdekkingen van X.

Als $\mathcal{U}$ een open overdekking van X is met samenhangende stukken, $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, X boogsamenhangend en lokaal boogsamenhangend, dan is er een functor $F : \underline{O}(\Sigma_{\mathcal{U}}) \to \underline{O}(X)$ zdd $Aut(\tilde{\Sigma}/\Sigma_{\mathcal{U}}) \cong Aut(F\tilde{\Sigma}/X)$, $F(\Sigma_{\mathcal{U}}) = X$, dit isomorfisme wordt geïnduceerd door F, en als voor alle $i \in I$, U_i enkelvoudig samenhangend is, dan is F zelfs een isomorfisme, dus als $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\pi} \Sigma_{\mathcal{U}}$ de universele overdekking van $\Sigma_{\mathcal{U}}$ is, dan is $F\tilde{\Sigma}$ de universele overdekking van X en

$$\pi_1(\Sigma_{\mathcal{U}}) \cong Aut(\tilde{\Sigma}/\Sigma_{\mathcal{U}}) \cong Aut(F\tilde{\Sigma}/X) \cong \pi_1(X)$$

Dus: $\pi_1(\Sigma_{\mathcal{U}}) \cong \pi_1(X)$

§6 De Dehn presentatie van de groep van een knoop van de 3e klasse.

Zij k een knoop vd 3e klasse. Na een evt. homeomorfism en een affiene transformatie, mogen we veronderstellen dat $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) := (x,y)$, de volgende eigenschappen mbt k heeft:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \pi^{-1}(x) \cap k$ heeft hoogstens 2 punten

(ii) a) $\quad D := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^{-1}(x) \cap k$ heeft 2 punten$\}$

D is aftelbaar

b) $\quad \forall x \in D \ \exists \varepsilon > 0 \ \exists l_1, l_2$ lijnen in de $\mathbb{R}^3$ zdd:

$\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap k = \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$ en $\pi(l_1) \cap \pi(l_2) = \{x\}$

<u>Lemma (6.1)</u> Zij $x \in D$ en $\varepsilon > 0$ zoals in (ii) b) dan is

$$D \cap U_\varepsilon(x) = \{x\}$$

<u>bew. (6.1)</u> $\{x\} \subset D \cap U_\varepsilon(x)$ als $x \in D$, want $\varepsilon > 0$. Omgekeerd:

Stel $y \in D \cap U_\varepsilon(x)$, dan is $y \in D$, dus $\exists Q_1, Q_2 \in k$, $Q_1 \neq Q_2$ en $\pi^{-1}(y) \cap k = \{Q_1, Q_2\}$.

$y \in U_\varepsilon(x)$ en $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap k = \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$, $Q_1, Q_2 \in \pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap k$

dus $Q_1, Q_2 \in (l_1 \cup l_2)$.

Als $Q_1 \in l_1$ en $Q_2 \in l_2$ dan is $y = \pi(Q_1) \in \pi(l_1)$ en $y = \pi(Q_2) \in \pi(l_2)$,

dus $y \in \pi(l_1) \cap \pi(l_2) = \{x\}$, dus $y = x$.

Evenzo geeft $Q_1 \in l_2$ en $Q_2 \in l_1$: $y = x$.

Als $Q_1 \in l_1$ en $Q_2 \in l_1$ dan is l_1 de lijn door Q_1 en Q_2

dus $l_1 \subset \pi^{-1}(y)$, dus $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap l_1 \subset k$, dus $\pi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \cap l_1 \subset \pi^{-1}(y) \cap k$

dus $\pi^{-1}(y) \cap k$ bevat oneindig veel punten, dit is in tegenspraak met (i). Evenzo leidt $Q_1 \in l_2$ en $Q_2 \in l_2$ tot een tegenspraak.

Dus $y = x \in \{x\}$, Dus $D \cap U_\varepsilon(x) \subset \{x\}$.

Dus $\{x\} = D \cap U_\varepsilon(x)$. $\boxtimes$

<u>Lemma</u> (6.2) Laat $\{P_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ een eenduidige aftelling van D zijn. Dan is er voor iedere $t \in \mathbb{N}$ e $\delta_t > 0$ zdd $V_s \cap V_t = \phi$ als $s \neq t$, met $V_t := U_{\delta_t}(P_t)$, en er zijn twee lijnen l_t^1 en l_t^2 en twee punten P_t^1 en P_t^2 met $P_t^i \in l_t^i$, $i=1,2$, P_t^1 ligt boven P_t^2, $\pi^{-1}(P_t) \cap k = \{P_t^1, P_t^2\}$ $\pi(l_t^1) \cap \pi(l_t^2) = \{P_t\}$ en $\pi^{-1}(V_t) \cap k = \pi^{-1}(V_t) \cap (l_t^1 \cup l_t^2)$ en $U_{\delta_t}(M_t) \cap k = \phi$, met $M_t := \frac{1}{2}(P_t^1 + P_t^2)$

<u>bew.</u> (6.2) Volgens (ii) a) is D aftelbaar, dus er is een eenduidige aftelling $\{P_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ van D.

Volgens (ii) b) is $\forall t \in \mathbb{N}$ er een $\varepsilon_t > 0$ en lijnen l_t^1 en l_t^2 zdd. $\pi(l_t^1) \cap \pi(l_t^2) = \{P_t\}$ en $\pi^{-1}(U_{\varepsilon_t}(P_t)) \cap k = \pi^{-1}(U_{\varepsilon_t}(P_t)) \cap (l_t^1 \cup l_t^2)$.

$P_t \in D$, dus er zijn P_t^1 en $P_t^2 \in k$, zdd. $\pi^{-1}(P_t) \cap k = \{P_t^1, P_t^2\}$.

We kunnen P_t^1 en P_t^2 zo nummeren dat P_t^1 boven P_t^2 ligt mbt de z-hoogte. Na eventueel hernummeren is $P_t^1 \in l_t^1$ en $P_t^2 \in l_t^2$.

Laat $M_t := \frac{1}{2}(P_t^1 + P_t^2)$, dan is $\pi(M_t) = P_t$ en $M_t \neq P_t^1$ en $M_t \neq P_t^2$ en $\pi^{-1}(P_t) \cap k = \{P_t^1, P_t^2\}$, dus $M_t \notin k$. k is gesloten, dus $\exists \eta_t > 0$ zdd $U_{\eta_t}(M_t) \cap k = \phi$.

Laat nu $\delta_t := \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t, \eta_t\}$ en $V_t := U_{\delta_t}(P_t)$, dan is $\delta_t < \varepsilon_t$ en $\pi^{-1}(U_{\delta_t}(P_t)) \cap k = \pi^{-1}(U_{\delta_t}(P_t)) \cap (l_t^1 \cup l_t^2)$ dus $\pi^{-1}(V_t) \cap k = \pi^{-1}(V_t) \cap (l_t^1 \cup l_t^2)$

Verder is: $V_s \cap V_t = \phi$ als $s \neq t$, want: stel $t < s$, dan is volgens Lemma (6.1): $D \cap U_{\varepsilon_t}(P_t) = \{P_t\}$, als $s \neq t$ dan is $P_s \neq P_t$, dus: $P_s \notin U_{\varepsilon_t}(P_t)$, $\delta_t \leq \frac{1}{2}\varepsilon_t$, dus $U_{\delta_t}(P_t) \cap U_{\delta_t}(P_s) = \phi$

$V_t = U_{\delta_t}(P_t)$, $t < s$, dus $\delta_s \leq \delta_t$, dus $V_s = U_{\delta_s}(P_s) \subset U_{\delta_t}(P_s)$

dus $(V_t \cap V_s) \subset U_{\delta_t}(P_t) \cap U_{\delta_t}(P_s) = \phi$, dus $V_s \cap V_t = \phi$. Evenzo als $t > s$

$\delta_t \leq \eta_t$ dus $U_{\delta_t}(M_t) \cap k \subset U_{\eta_t}(M_t) \cap k = \phi$. $\boxtimes$

K is een knoop in de $\mathbb{R}^3$, dus er is een $k: S^1 \to K$, k een homeomorfisme.

We kunnen S^1 op twee manieren doorlopen: nl.

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to S^1 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to S^1 \\ t \mapsto (\cos t, -\sin t) \end{array}$$

Kiezen we nu de eerste oriëntatie van S^1.

De gekozen oriëntatie van S^1, induceert d.m.v. k, een doorloopszin van K, $l_t^j \cap \pi^{-1}(V_t)$ is een open lijnstuk en deel van K, de oriëntatie van K geeft l_t^j een richting.

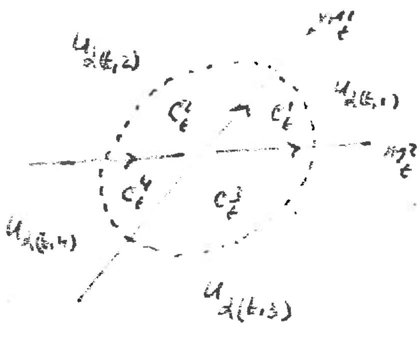
$m_t^j := \pi(l_t^j)$ is een lijn in $\mathbb{R}^2$, de richting van l_t^j induceert, d.m.v. π, een richting op m_t^j

We kunnen dus van een linker en een rechterkant van m_t^j in $\mathbb{R}^2$ spreken.

V_t is een open schijf om P_t en $V_t \cap (m_t^1 \cup m_t^2) = V_t \cap \pi(K)$ en $m_t^1 \cap m_t^2 = \pi(l_t^1) \cap \pi(l_t^2) = \{P_t\}$.

Dus $V_t \setminus \pi(K) = V_t \setminus (m_t^1 \cup m_t^2) = C_t^1 \cup C_t^2 \cup C_t^3 \cup C_t^4$, waarin $\{C_t^i \mid i = 1,2,3,4\}$ de samenhangscomponenten van $V_t \setminus \pi(K)$ zijn en wel zo dat:

C_t^1 links van m_t^2 en rechts van m_t^1 ligt,
C_t^2 links van m_t^2 en links van m_t^1 ligt,
C_t^3 rechts van m_t^2 en rechts van m_t^1 ligt,
C_t^4 rechts van m_t^2 en links van m_t^1 ligt.

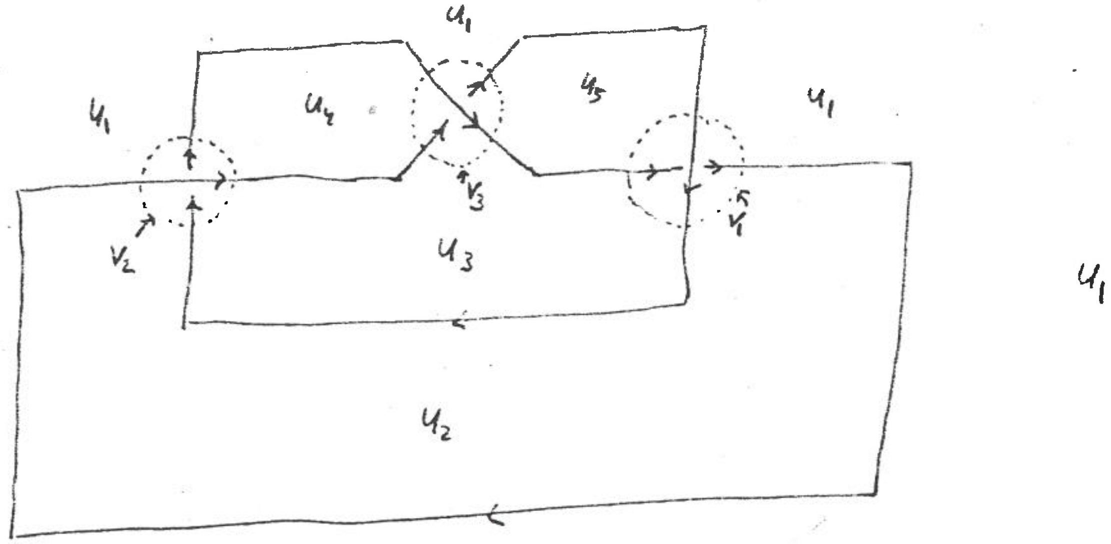


Verder is K compact, dus $\pi(K)$ ook, dus $\pi(K)$ is gesloten in $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ is lokaal samenhangend, dus de samenhangscomponenten van $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ zijn open. $\mathbb{R}^2$ is separabel, dus $\mathbb{R}^2 \setminus K$ kan hoogstens aftelbaar veel samenhangscomponenten hebben.

Laat $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ een eenduidige aftelling van de samenhangscomponenten van $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ zijn. C_t^i is een samenhangende verz. in $V_t \setminus \pi(K)$, dus ook in $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$, laat $U_{\lambda(t,i)}$ de samenhangscomponent van $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ zijn, die C_t^i bevat

Om deze overvloed aan definities en notaties te verduidelijken geven we nu een voorbeeld.

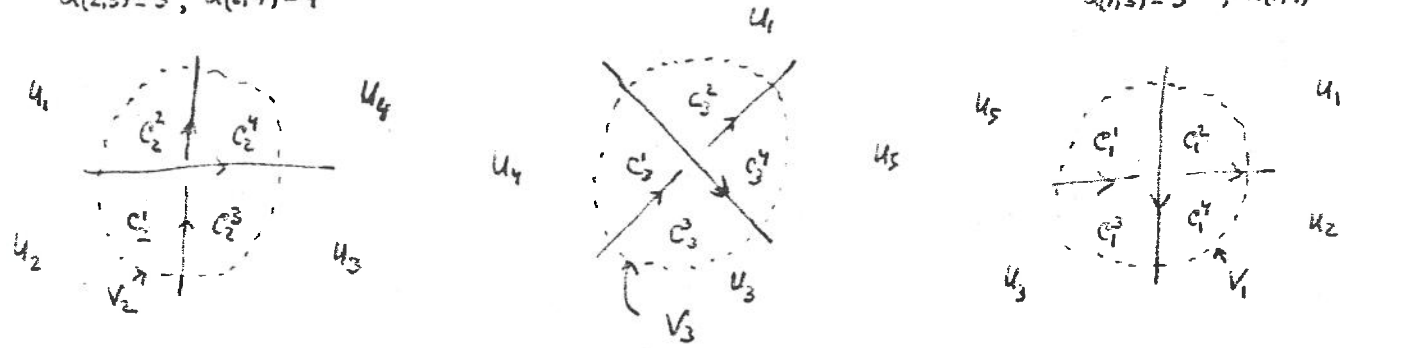
vb.



$\alpha(2,1)=2$, $\alpha(2,2)=1$
$\alpha(2,3)=3$, $\alpha(2,4)=4$

$\alpha(3,1)=4$, $\alpha(3,2)=1$,
$\alpha(3,3)=3$, $\alpha(3,4)=5$

$\alpha(1,1)=5$, $\alpha(1,2)=1$
$\alpha(1,3)=3$, $\alpha(1,4)=2$



Stelling (6.3) Zij k een derde klas knoop in $\mathbb{R}^3$ en $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\{P_t \mid t \in N\}$ en $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ zoals hiervoor is aangegeven, dan heeft $\pi_1(K)$ een presentatie van de volgende vorm:

$$< u_\alpha,\ \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1,\ u_{\alpha(t,1)} u^{-1}_{\alpha(t,2)} = u_{\alpha(t,3)} u^{-1}_{\alpha(t,4)},\ t \in N >$$

waarin α_0 een willekeurig element uit A is.

vb. De groep van de knoop uit het voorafgaande voorbeeld zou dan de volgende presentatie hebben:

$$< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \mid u_1 = 1,\ u_5 u_1^{-1} = u_3 u_2^{-1},\ u_2 u_1^{-1} = u_3 u_4^{-1},\ u_4 u_1^{-1} = u_3 u$$

opm. Deze presentatie van de groep van een 3e klas knoop, is voor tamme knopen minder gebruikelijk dan de Wirtinger presentatie (zie 6.7); omdat deze laatste altijd één voortbrenger en één relatie minder heeft bij een gegeven reguliere projectie van de tamme knoop.

opm. Zo'n presentatie als in stelling (6.3) is vóór tamme knopen gegeven door M. Dehn in het artikel:
"Topologie des dreidimensionalen Raumes," blz 157. in Math. Ann. 69 (1910), 140 – 169.
We zullen het in het vervolg de Dehn presentatie noemen

bew. st. (6.3) We geven eerst een overdekking van X, $X := \mathbb{R}^3 \setminus K$, met open, boogsamenhangende en enkelvoudig samenhangende stukken.
Laat P_3 de z-coördinaat van P in $\mathbb{R}^3$ zijn

(i) $X_+ := \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \forall P' \in K : \pi(P') = \pi(P) \Rightarrow P_3' < P_3 \}$.

$X_- := \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \forall P' \in K : \pi(P') = \pi(P) \Rightarrow P_3 < P_3' \}$

Er geldt X_+ en X_- zijn open, boogsamenhangende en enkelvoudig samenhangende verzamelingen in X.
$X_+ \subset X$ en $X_- \subset X$, dit is direkt duidelijk uit de definitie

a) X_+ is open, want

$X_+ = \mathbb{R}^3 \setminus K_-$, waarin voor een verz. $A \subset \mathbb{R}^3$

$A_- := \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \exists P' \in A : \pi(P) = \pi(P')$ en $P_3 \leq P_3' \}$, voor een compacte verzameling A is A_- gesloten., K is compact, dus K_- is gesloten, dus X_+ is open

b) X_+ is samentrekbaar, want:
K is compact, dus $\exists z_+ \in \mathbb{R}$ zdd $\forall P \in K$ geldt: $P_3 < z_+$,
laat $V_+ := \{ (x, y, z_+) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$, dus V_+ is het vlak evenwijdig aan het xy-vlak, ter hoogte z_+, dan is het duidelijk dat $V_+ \subset X_+$. Laat $f : X_+ \to V_+$ gedefinieerd zijn door $f(x, y, z) := (x, y, z_+)$
dan is f een deformatie retract van X_+ op V_+, want:
$F : X_+ \times [0,1] \to X_+$, met $F((x,y,z),t) := t(x,y,z) + (1-t)(x,y,z_+)$ voor $t \in [0,1]$
en $(x,y,z) \in X_+$, dan is F welgedefinieerd, want als $(x,y,z) \in X_+$ en $P' \in K$ en $\pi(P') = \pi(F((x,y,z),t))$, dus $\pi(P') = (x, y) = \pi(x,y,z)$

dan is $P_3' < z$, want $(x,y,z) \in X_+$

De z-coördinaat van $F((x,y,z),t)$ is: $tz + (1-t)z_+$.

Als $z \geq z_+$ dan is: $z \geq z_+ > P_3'$ dus $tz + (1-t)z_+ \geq tz_+ + (1-t)z_+ = z_+ > P_3'$

Als $z \leq z_+$ dan is: $tz + (1-t)z_+ \geq tz + (1-t)z = z > P_3'$

Dus $F((x,y,z),t) \in X_+$, dus F is welgedefinieerd.

Uit de definitie van F volgt direct dat F continu is.

$F(-,0)$ is de functie $f: X_+ \to V_+$ en

$F(-,1)$ is de identiteit op X_+ en voor alle t is $F(-,t)(V_+) \subset V_+$,

dus f is een deformatie retract van X_+ op V_+ , $V_+ \cong \mathbb{R}^2$

Dus X_+ is boogsamenhangend en enkelvoudig samenhangend

Evenzo is X_- open, boogsamenhangend en enkelv. samenhangend

(ii) De situatie om P_t , $t \in N$ is alsvolgt:

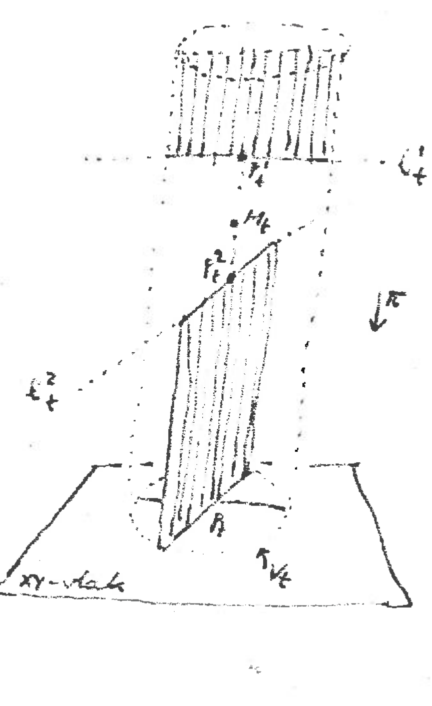
$\pi^{-1}(P_t) \cap K = \{P_t^1, P_t^2\}$, P_t^1 ligt boven P_t^2 . Er zijn twee lijnen l_t^1 en l_t^2 in $\mathbb{R}^3$, $P_t^j \in l_t^j$ voor $j=1,2$, $\pi(l_t^1) \cap \pi(l_t^2) = \{P_t\}$. Er is een open schijf-omgeving om P_t met straal δ_t : V_t zdd. $\pi^{-1}(V_t) \cap K = \pi^{-1}(V_t) \cap (l_t^1 \cup l_t^2)$ en $V_s \cap V_t = \emptyset$ als $s \neq t$, $M_t := \frac{1}{2}(P_t^1 + P_t^2)$ en $U_{\delta_t}(M_t) \cap K = \emptyset$

Definieer nu: $$Y_t := \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid P \in \pi^{-1}(V_t) ,\ \begin{array}{l} \forall Q \in \pi^{-1}(V_t) \cap l_t^1 : \pi(Q) = \pi(P) \Rightarrow Q_3 > P_3 \\ \forall Q \in \pi^{-1}(V_t) \cap l_t^2 : \pi(Q) = \pi(P) \Rightarrow Q_3 < P_3 \end{array} \right\}$$

Er geldt Y_t is een open, boogsamenhangende en enkelvoudig samenhangende deelverzameling van X.

a) $Y_t \subset X$, want: stel $P \in Y_t$, dan is $P \in \pi^{-1}(V_t)$
Als $P \in K$ dan is $P \in \pi^{-1}(V_t) \cap K = \pi^{-1}(V_t) \cap (l_t^1 \cup l_t^2)$, dus $P \in l_t^1 \cup l_t^2$, neem $Q = P$, dan is $P_3 = Q_3$. dit is in tegenspraak met de eis $P_3 < Q_3$ als $Q = P \in l_t^1$ en de eis $P_3 > Q_3$ als $Q = P \in l_t^2$, dus $P \notin K$, dus $P \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) = X$. Dus $Y_t \subset X$.

b) $$Y_t = \pi^{-1}(V_t) \setminus \left(\{ Q \in \mathbb{R}^3 \mid \exists Q' \in l_t^1 : \pi(Q) = \pi(Q') \text{ en } Q_3 \geq Q_3' \} \cup \{ Q \in \mathbb{R}^3 \mid \exists Q' \in l_t^2 : \pi(Q) = \pi(Q') \text{ en } Q_3 \leq Q_3' \} \right)$$



$\pi^{-1}(V_t)$ is open, want V_t is open en π continu, en de laatste twee verz'n zijn resp. de verzameling "boven l_t^1" en "beneden l_t^2", beide zijn gesloten, dus Y_t is open.

c) $\mathcal{Y}_t$ is samentrekbaar, want: laat $G_t := \{ P \in \pi^{-1}(V_t) \mid P_3 = M_{t,3} \}$ en

$g : \mathcal{Y}_t \times [0,1] \to \mathcal{Y}_t$ gedefinieerd zijn door:

$g((x,y,z),s) := s(x,y,z) + (1-s)(x,y,z_t)$, voor $s \in [0,1]$ en $(x,y,z) \in \mathcal{Y}_t$ en

$z_t := M_{t,3}$ = de z-coördinaat van M_t, dan is g welgedefinieerd,

want stel $R := g((x,y,z),s)$ voor $(x,y,z) \in \mathcal{Y}_t$ en $s \in [0,1]$, dan is

$\pi(R) = (x,y) = \pi(x,y,z) \in V_t$, stel $\pi(Q) = \pi(R)$ en $Q \in \ell_t^1$, dan is voor $P := ($

$\pi(Q) = \pi(P)$ en $P \in \mathcal{Y}_t$ dus $Q_3 > P_3$

Als $z \geq z_t$, dan is $R_3 = sz + (1-s) z_t \leq s \cdot z + (1-s) z = z = P_3 < Q_3$

Als $z \leq z_t$, dan is $R_3 = s.z + (1-s) z_t \leq s.z_t + (1-s) z_t = z_t$

$z_t < Q_3$, want anders is $Q_3 \leq z_t$, $Q \in \ell_t^1$ en $z_t < P_{t,3}^1$ en $P_t^1 \in \ell_t^1$,

dus dan is er een $Q' \in \ell_t^1$ met $Q_3' = z_t$, maar dan is:

$d(Q', M_t) = d(\pi(Q'), \pi(M_t)) = d(\pi(Q'), P_t) \leq d(\pi(Q), P_t)$, want:

Q' ligt tussen Q en P_t^1 op ℓ_t^1, dus $\pi(Q')$ ligt tussen $\pi(Q)$ en $\pi(P_t^1) = P_t$,

, dus $d(Q', M_t) \leq d(\pi(Q), P_t) = d(\pi(P), P_t) < \delta_t$, want $P \in \pi^{-1}(V_t)$, dus

$Q' \in U_{\delta_t}(M_t) \setminus K$, tegenspraak. dus $R_3 \leq z_t < Q_3$ als $z \leq z_t$.

Evenzo is $R_3 > Q_3$ als $\pi(Q) = \pi(R)$ en $Q \in \ell_t^2$.

Dus $R \in \mathcal{Y}_t$, dus g is welgedefinieerd, en g is continu,

$g(-,0)$ is een afbeelding van $\mathcal{Y}_t$ naar G_t, $g(-,s)(G_t) \subset G_t$ $\forall s \in [0,1]$

en $g(-,1)$ is de identiteit op $\mathcal{Y}_t$, dus $g(-,0)$ is een deformatie

retract van $\mathcal{Y}_t$ op G_t, $G_t \cong \mathring{D}^2$ de open eenheidsschijf. dus

$\mathcal{Y}_t$ is samentrekbaar.

Dus $\mathcal{Y}_t$ is boogsamenhangend en enkelvoudig samenhangend.

(iii) Laat nu $\mathcal{U} := \{ X_+, X_- \} \cup \{ \mathcal{Y}_t \mid t \in N \}$, dan is $\mathcal{U}$ een open

overdekking van X met boogsamenhangende en enkelvoudig

samenhangende verzamelingen.

We hoeven alleen nog te laten zien dat $\mathcal{U}$ een overdekking is.

Zij $P \in X = \mathbb{R}^3 \setminus K$ en $P \notin X_+$ en $P \notin X_-$, omdat $P \notin X_+$ is er een

$Q^1 \in K$ met $\pi(Q^1) = \pi(P)$ en $Q_3^1 > P_3$, omdat $P \notin X_-$ is er een $Q^2 \in K$ met

$\pi(Q^2) = \pi(P)$ en $Q_3^2 < P_3$, dus $\pi(Q^1) = \pi(P) = \pi(Q^2)$, $Q^1, Q^2 \in K$ en $Q_3^2 < P_3 < Q_3^1$ dus

$Q^1 \neq Q^2$, dus $\pi(P) \in (K)$, dus $\pi(P) \in D$, dus is er een $t \in N$ met $P_t = \pi($

$Q_3^1 > Q_3^2$ en $Q^1, Q^2 \in K$, dus $Q^1 = P_t^1$ en $Q^2 = P_t^2$ en voor alle Q met $\pi(Q) = \pi($

en $Q \in \ell_t^1$ geldt $Q = P_t^1 = Q^1$ dus $Q_3 = Q_3^1 > P_3$ en voor alle Q met $\pi(Q) = \pi(P)$

en $Q \in \ell_t^2$ geldt $Q = P_t^2 = Q^2$ dus $Q_3 = Q_3^2 < P_3$, dus $P \in \mathcal{Y}_t$.

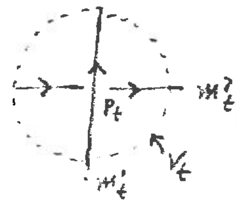
Dus $\mathcal{U}$ is een overdekking van X.

(iv) We gaan nu na hoe het ase $\Sigma_{\mathcal{U}}$, behorend bij de overdekking $\mathcal{U}$, eruit ziet:

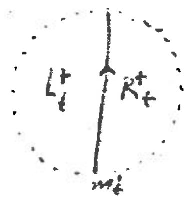
$\mathcal{U} = \{X_+, X_-\} \cup \{Y_t \mid t \in \mathbb{N}\}$. laat $\mathcal{U}$ door zichzelf worden geïndiceerd en laat de partiële orde $<$ op $\mathcal{U}$ gedefinieerd zijn door: $X_+ < Y_t < X_-$ en geen relatie tussen de Y_s en Y_t voor $s \neq t$.

a) Dus $\Sigma^0_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

b) Verder hadden we al: $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K) = \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, met U_α is een (open) samenhangscomponent van $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ en A is aftelbaar.
Laat $\tilde{U}_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha)$, dan is $\tilde{U}_\alpha \cong U_\alpha \times \mathbb{R}$, U_α en $\mathbb{R}$ zijn samenhangend, dus $\tilde{U}_\alpha$ is samenhangend; $\tilde{U}_\alpha$ is open, want U_α is open en π continu, $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \phi$ als $\alpha \neq \beta$, want $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = \pi^{-1}(\phi) = \phi$
$X_+ \cap X_- = \cup\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$, want: stel $P \in X_+ \cup X_-$, dan is $\pi(P) \notin \pi(K)$ anders is er een $P' \in K$ met $\pi(P') = \pi(P)$, als $P_3 = P_3'$ dan is $P = P' \in K$, maar $P \in X_+ \cap X_- \subset X = \mathbb{R}^3 \setminus K$, als $P_3 < P_3'$ dan is $P \notin X_+$ en als $P_3 > P_3'$, dan is $P \notin X_-$, dus $\pi(P) \notin \pi(K)$, dus $\pi(P) \in \mathbb{R}^2 \setminus \pi(K) = \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, dus er is een $\alpha \in A$ met $P \in \pi^{-1}(U_\alpha) = \tilde{U}_\alpha$. Omgekeerd: stel $P \in \cup\{\tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ dan is $\pi(P) \in U_\alpha$ voor zekere $\alpha \in A$, dus $\pi(P) \notin \pi(K)$, dus er is geen $P' \in K$ met $\pi(P) = \pi(P')$, dus $P \in X_+$ en $P \in X_-$, dus $P \in X_+ \cap X_-$.
Dus de $\tilde{U}_\alpha$ zijn de samenhangs componenten van $X_+ \cap X_-$
We hebben al opgemerkt dat door een keuze van een oriëntatie van de lijnen l_t^1 en l_t^2 een richting krijgen en daardoor: ook de lijnen m_t^1 en m_t^2, met $m_t^i := \pi(l_t^i)$; V_t is de open schijf om P_t met straal δ_t, en $m_t^1 \cap m_t^2 = \{P_t\}$

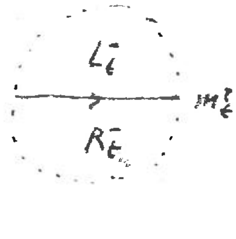


m_t^1 verdeelt V_t in twee stukken, laat:
R_t^+ het deel van V_t, rechts van m_t^1,
L_t^+ het deel van V_t, links van m_t^1,
R_t^- het deel van V_t, rechts van m_t^2,
L_t^- het deel van V_t, links van m_t^2 zijn.



Laat: $\tilde{R}_t^+ := \pi^{-1}(R_t^+)$, $\tilde{L}_t^+ := \pi^{-1}(L_t^+)$, $\tilde{R}_t^- := \pi^{-1}(R_t^-)$, $\tilde{L}_t^- := \pi^{-1}(L_t^-)$
Dan is: $X_+ \cap Y_t = \tilde{R}_t^+ \cup \tilde{L}_t^+$ en $Y_t \cap X_- = \tilde{R}_t^- \cup \tilde{L}_t^-$

$\tilde{R}_t^+$ en $\tilde{L}_t^+$ zijn de samenhangs componenten van $X_+ \cap Y_t$
$\tilde{R}_t^-$ en $\tilde{L}_t^-$ zijn de samenhangs componenten van $Y_t \cap X_-$
Dit is direct na te gaan. Dus:



$$\Sigma^1_{\mathcal{U}} = \{(X_+, X_-, \tilde{U}_\alpha) \mid \alpha \in A\} \cup \{(X_+, Y_t, \tilde{R}_t^+), (X_+, Y_t, \tilde{L}_t^+) \mid t \in \mathbb{N}\} \cup \cup\{(Y_t, X_-, \tilde{R}_t^-), (Y_t, X_-, \tilde{L}_t^-) \mid t \in \mathbb{N}\}$$

(c) De enige drietallen (u, v, w) uit $\mathcal{U}$ met $u < v < w$ zijn (X_+, Y_t, X_-).

Al verder hadden we opgemerkt dat

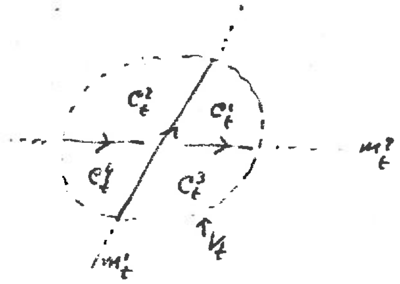
$V_t \setminus (m_t^1 \cup m_t^2) = C_t^1 \cup C_t^2 \cup C_t^3 \cup C_t^4$ met:

C_t^1 links van m_t^2 en rechts van m_t^1

C_t^2 links van m_t^2 en links van m_t^1

C_t^3 rechts van m_t^2 en rechts van m_t^1

C_t^4 rechts van m_t^2 en links van m_t^1



$\{C_t^j \mid j = 1,2,3,4\}$ zijn de samenhangscomponenten van $V_t \setminus (m_t^1 \cup m_t^2)$.

Zij $\tilde{C}_t^j := \pi^{-1}(C_t^j)$ dan is $\tilde{C}_t^i \cap \tilde{C}_t^j = \emptyset$ als $i \neq j$ en $\tilde{C}_t^j \cong C_t^j \times \mathbb{R}$ is samenhangend en

$$X_+ \cap Y_t \cap X_- = \tilde{C}_t^1 \cup \tilde{C}_t^2 \cup \tilde{C}_t^3 \cup \tilde{C}_t^4 .$$

Dus $\{\tilde{C}_t^j \mid 1 \le j \le 4\}$ is de collectie samenhangscomponenten van $X_+ \cap Y_t \cap X_-$.

Verder hadden we al gedefinieerd $d(t,j) \in A$ als $t \in \mathbb{N}$ en $1 \le j \le 4$.

Z.d.d. $U_{d(t,j)}$ is de samenhangscomponent van C_t^j in $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$.

Dus $\Sigma_{\mathcal{U}}^2 = \{ (X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^j) \mid t \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le 4 \}$.

en verder is
$$d_0(X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^1) = (Y_t, X_-, \tilde{L}_t^-)$$
$$d_0(X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^2) = (Y_t, X_-, \tilde{L}_t^-).$$
$$d_0(X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^3) = (Y_t, X_-, \tilde{R}_t^-)$$
$$d_0(X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^4) = (Y_t, X_-, \tilde{R}_t^-)$$
$$d_1(X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^j) = (X_+, X_-, \tilde{U}_{d(t,j)}).$$
$d_2(X_+, Y_t, X_-, \tilde{C}_t^j)$ analoog aan d_0.

verder is bijvoorbeeld:

$d_0(X_+, X_-, \tilde{U}_d) = X_-$, $d_1(X_+, X_-, \tilde{U}_d) = X_+$

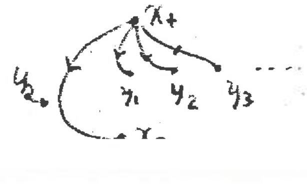
$d_0(X_+, Y_t, \tilde{R}_t^+) = Y_t$, $d_1(X_+, Y_t, \tilde{R}_t^+) = X_+$ enzovoorts.

Hiermee is $\Sigma_{\mathcal{U}}$ bepaald.

(v) Berekenen we nu $\pi_1(\Sigma_{\mathcal{U}})$

Een maximale boom B in $\Sigma_{\mathcal{U}}$ is dan: $B^0 := \{X_+, X_-\} \cup \{Y_t \mid t \in \mathbb{N}\}$

$B^1 := \{(X_+, X_-, U_{d_0})\} \cup \{(X_+, Y_t, \tilde{L}_t^+) \mid t \in$



Maken we de volgende afkortingen:

$u_\alpha := (x_+, x_-, \tilde{u}_\alpha)$ $\quad \alpha \in A$

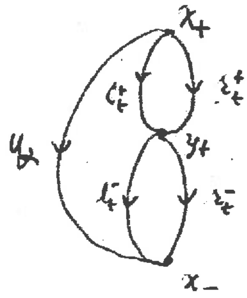
$r_t^+ := (x_+, y_t, \tilde{R}_t^+)$ $\quad t \in N$

$l_t^+ := (y_t, x_-, \tilde{l}_t^+)$

$r_t^- := (x_+, y_t, \tilde{R}_t^-)$

$l_t^- := (y_t, x_-, \tilde{L}_t^-)$

$\sigma_t^j := (x_+, y_t, x_-, \tilde{\sigma}_t^j)$, $1 \le j \le 4$, $t \in N$



Dan is: $\Sigma^0_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$

$\Sigma^1_{\mathcal{V}} = \{u_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \{r_t^+, l_t^+, r_t^-, l_t^- \mid t \in N\}$

$\Sigma^2_{\mathcal{V}} = \{\sigma_t^j \mid 1 \le j \le 4, \ t \in N\}$.

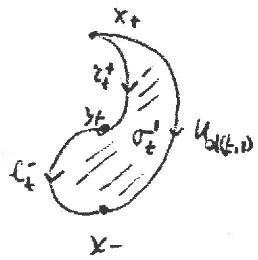
en $B^0 = \Sigma^0_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$

en $B^1 = \{u_{\alpha_0}\} \cup \{l_t^+ \mid t \in N\}$.

Dus $\Sigma^1 \setminus B^1 = \{u_\alpha \mid \alpha \in A, \ \alpha \neq \alpha_0\} \cup \{r_t^+, r_t^-, l_t^- \mid t \in N\}$

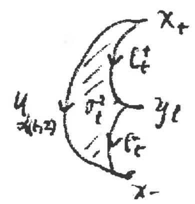
De relaties zijn

voor σ_t^1 : $\quad r_t^+ \cdot l_t^- = u_{\alpha(t,1)}$ ... (1)

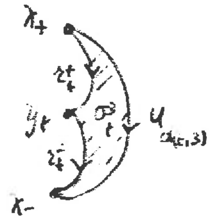


voor σ_t^2 : $\quad l_t^- = u_{\alpha(t,2)}$ ... (2)

want $\tilde{l}_t^+ = 1$

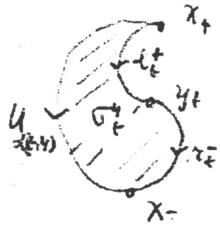


voor σ_t^3 : $\quad r_t^+ \cdot r_t^- = u_{\alpha(t,3)}$ ... (3)



voor σ_t^4 : $\quad r_t^- = u_{\alpha(t,4)}$ ... (4)

want



vatten we (2) en (4) op als definities voor l_t^- en r_t^- dan worden (1) en (3):

$r_t^+ = u_{\alpha(t,1)} \cdot u_{\alpha(t,2)}^{-1}$ ... (5) $\quad$ en $\quad r_t^+ = u_{\alpha(t,3)} \cdot u_{\alpha(t,4)}^{-1}$ ... (6)

vatten (5) op als definitie voor r_t^+ dan wordt (6) een relatie, nl:

$$u_{\alpha(t,1)} \cdot u_{\alpha(t,2)}^{-1} = u_{\alpha(t,3)} \cdot u_{\alpha(t,4)}^{-1} .$$

Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k) \cong \pi_1(\Sigma_{\nu r})$ heeft als presentatie:

$$< u_\alpha \ , \alpha \in A \ ; \ r_t^+, r_t^-, l_t^- \ , t \in N \mid u_{\alpha_0} = 1 \ , \ r_t^+ \cdot l_t^- = u_{t_1} \ , \ l_t^- = u_{t_2} \ , \ r_t^+ \cdot r_t^- = u_{t_3} \ , \ r_t^-$$

dit is volgens het voorafgaande equivalent met:

$$< u_\alpha \ , \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1 \ , \ u_{\alpha(t,1)} \cdot u^{-1}_{\alpha(t,2)} = u_{\alpha(t,3)} \cdot u^{-1}_{\alpha(t,4)} >$$

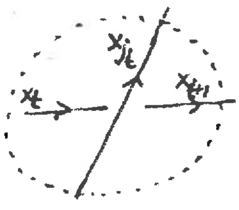
Hiermee is stelling (6.3) bewezen. $\boxtimes$.

§7 De Wirtinger presentatie

(i) Stel dat k een tamme knoop in de $\mathbb{R}^2$ is, na een cut homeomorfisme en een affiene transformatie, mogen we veronderstellen dat er m punten $Q_1, \dots, Q_m$ op k liggen zodat L_i het lijnstuk van Q_i naar Q_{i+1} is en $Q_i \neq Q_j$ als $i \neq j$,
en $\quad k = \cup \{ L_i \mid 1 \leq i \leq m \}$ en

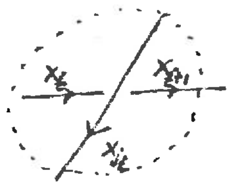
$$L_i \cap L_j = \emptyset \quad \text{als } |i-j| > 1 \quad , \quad L_i \cap L_j = \begin{cases} \{Q_{i+1}\} & \text{als } j = i+1 \\ \{Q_i\} & \text{als } j = i-1 \\ L_i & \text{als } j = i \end{cases}$$

en dat $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) := (x,y)$, regulier is mbt k.
$D := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^{-1}(x) \cap k \text{ bevat 2 punten} \}$. D is eindig.
want $D \hookrightarrow \mathcal{P}_2(I) := \{ I' \subset I \mid |I'| = 2 \}$, met $I = \{1, \dots, m\}$. zie: blz. 4-6.
Stel $D = \{P_1, \dots, P_n\}$, $k \cap \pi^{-1}(P_t) = \{P_t^1, P_t^2\}$, P_t^1 ligt boven P_t^2.
Laat x_i een samenhangscomponent van $k \setminus \{P_t^2 \mid 1 \leq t \leq n\}$ zijn.
Er zijn precies n samenhangscomponenten in $k \setminus \{P_t^2 \mid 1 \leq t \leq n\}$,
als $n \geq 1$, want $k \cong S^1$, en we halen precies n punten uit k weg. nz
zie voor het geval $n=0$: blz. 7-5.
kies een oriëntatie voor k, dan is $\quad k \setminus \{P_t^2 \mid 1 \leq t \leq n\} = \cup \{ x_i \mid 1 \leq i \leq n \}$ en we kunnen de x_i zo nummeren dat x_{i+1} na x_i komt als we k, met de oriëntatie, mee doorlopen. ($x_{n+1} := x_1$)
Locaal ziet het er in P_t als volgt uit:



$\varepsilon_t = +1$

of:



$\varepsilon_t = -1$

Voor iedere t, $1 \leq t \leq n$, is er precies één j_t , $1 \leq j_t \leq n$ zodat x_{j_t} , P_t overkruist , Zij $\varepsilon_t \in \{+1, -1\}$ als volgt gedefinieerd : $\varepsilon_t := +1$ als x_{j_t} van rechts naar links loopt, indien we van x_t naar x_{t+1} gaan en $\varepsilon_t := -1$ als x_{j_t} van links naar rechts loopt, indien we van x_t naar x_{t+1} gaan.
De Wirtinger presentatie van de groep van k ziet er nu als volgt uit:

$$< x_t\ ,\ 1\le t\le n \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t}\cdot x_t\cdot x_{j_t}^{-\varepsilon_t}\ ,\ 1\le t\le n > \cdots\cdots (1)$$

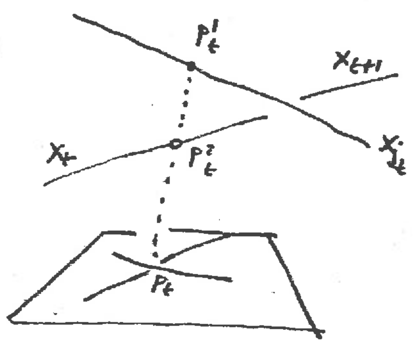
In stelling (7.1) zullen we bewijzen dat de Wirtinger presentatie en de Dehn presentatie equivalent zijn, dus dat de groepen die ze presenteren isomorf zijn.

(ii) Treffen we eerst enkele voorbereidingen:

Voor t, $1\le t\le n$ is er een schijfomgeving V_t om P_t zodat $V_s\cap V_t=\emptyset$ als $s\neq t$, en er zijn lijnen l_t^1 en l_t^2 zodat $P_t^j\in l_t^j$, $j=1,2$, en $\pi^{-1}(V_t)\cap k=\pi^{-1}(V_t)\cap(l_t^1\cup l_t^2)$ en $\pi(l_t^1)\cap\pi(l_t^2)=\{P_t\}$

We kunnen de P_t zo nummeren, dat x_t voor P_t^2 ligt en x_{t+1} na P_t^2 komt (mbt de omloopszin van k) en $\{x_t\}\cup\{P_t^2\}\cup\{x_{t+1}\}$ samenhangend is

$k\setminus\{P_t^j \mid 1\le t\le n,\ j=1,2\}=\cup\{\tilde{y}_i \mid 1\le i\le 2n\}$,

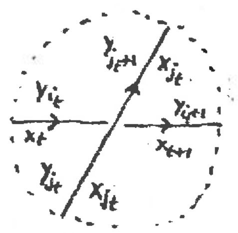


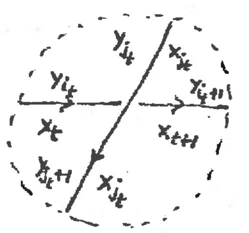
$\tilde{y}_i$ zijn de $2n$ samenhangscomponenten van $k\setminus\{P_t^j \mid 1\le t\le n,\ j=1,2\}$, dit zijn er precies $2n$, omdat $k\cong S^1$ en we precies $2n$ punten uit k weghalen, $(n\ge 1)$

We kunnen de $\tilde{y}_i$ nog zo nummeren, dat $\tilde{y}_{i+1}$ direct na $\tilde{y}_i$ komt, mbt de omloopszin van k, en $\tilde{y}_1$ in x_1 ligt. ($\tilde{y}_{2n+1}:=\tilde{y}_1$).

Er zijn $i_0, i_1, \dots, i_n$, met $i_0=-1$ en $1\le i_1<\dots<i_n=2n$ zodat voor i en t geldt: $1\le t\le n$ en $i_{t-1}<i\le i_t \Rightarrow \tilde{y}_i\subset x_t$, dus er is precies één $t(i)$, $1\le t(i)\le n$, met $\tilde{y}_i\subset x_{t(i)}$

Zij $\tilde{y}_{j_t}$ de component die voor P_t^1 ligt en zó dat $\tilde{y}_{j_t}\cup\{P_t^1\}\cup\tilde{y}_{j_t+1}$ samenhangend is, dan geldt: $\tilde{y}_{j_t}\subset x_t$ en $\tilde{y}_{j_t+1}\subset x_t$





Beschouw de presentatie:

$$< y_i\ ,\ 1\le i\le 2n \mid y_i=y_{i+1}\ ,\ \underset{1\le t\le n}{i_{t-1}<i<i_t}\ ,\ y_{i_t+1}=y_{j_t}^{\varepsilon_t}\,y_{i_t}\,y_{j_t+1}^{-\varepsilon_t}\ ,\ 1\le t\le n > \cdots\cdots (2)$$

Definieer $f(y_i):=x_{t(i)}$ en $g(x_t):=y_{i_t}$

dan is: $f(Y_{i_{t+1}}) = X_t$. $f(Y_{i_t}) = X_t$. $f(Y_{j_t}) = X_{j_t} = f(Y_{j_{t+1}})$

en $f(Y_{i_{t+1}}) = X_{t+1} = X_{j_t}^{\varepsilon_t} X_t X_{j_t}^{-\varepsilon_t} = f(Y_{j_t})^{\varepsilon_t} f(Y_{i_t}) f(Y_{j_{t+1}})^{-\varepsilon_t}$ in de groep die gepresenteerd wordt door (2)., dus f definieert een groepsmorfisme van de groep die door (1) wordt voorgesteld naar de groep die door (2) wordt gepresenteerd.

Evenzo voor g van (2) naar (1), want:

$g(X_t) = Y_{i_t}$, $g(X_{t+1}) = Y_{i_{t+1}} = Y_{i_{t+1}-1} = \cdots = Y_{i_t+1}$

$g(X_{j_t}) = Y_{i_{j_t}} = Y_{i_{j_t}+1} = \cdots = Y_{j_t} = Y_{j_t+1}$

dus $g(X_{t+1}) = Y_{i_{t+1}} = Y_{j_t}^{\varepsilon_t} Y_{i_t} Y_{j_{t+1}}^{-\varepsilon_t} = g(X_{j_t})^{\varepsilon_t} g(X_t) g(X_{j_t})^{-\varepsilon_t}$, in de groep die door (1) wordt voorgesteld.

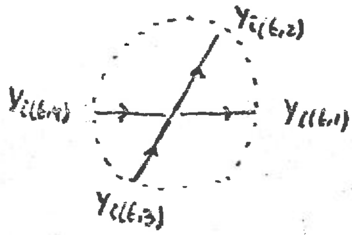
De door f en g gedefinieerde groepsmorfismen zijn elkaars inverse, dus de twee presentaties (1) en (2) zijn equivalent.

(iii) $Y_i := \pi(\tilde{Y}_i)$, op Y_i liggen geen dubbelpunten, dus $\pi/\tilde{Y}_i : \tilde{Y}_i \to Y_i$ is een homeomorfisme. Omdat Y_i samenhangend is en $Y_i \cap D = \phi$ en X_i een richting heeft (afkomstig van $\tilde{Y}_i$), is er één $\alpha_i \in A$ en één $\beta_i \in A$, met: $Y_i \subset \bar{U}_{\alpha_i} \cap \bar{U}_{\beta_i}$ en U_{β_i} ligt links van Y_i en U_{α_i} ligt rechts van Y_i, waarin de U_λ, $\lambda \in A$, de samenhangscomponenten van $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ zijn.

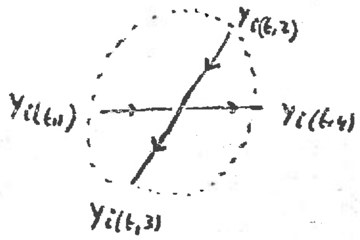
$\pi^{-1}(V_t) \cap K = \pi^{-1}(V_t) \cap (l_t \cup l_t^2)$ en $\pi^{-1}(V_t) \cap (K \setminus \{P_t, P_t^2\}) = \pi^{-1}(V_t) \cap (\tilde{Y}_{i_t} \cup \tilde{Y}_{i_{t+1}} \cup \tilde{Y}_{j_t} \cup \tilde{Y}_{j_{t+1}})$

Stellen we: $i(t,1) := i_t+1$, $i(t,2) := j_t+1$, $i(t,3) := j_t$ en $i(t,4) := i_t$, als $\varepsilon_t = +1$

en: $i(t,1) := i_t$, $i(t,2) := j_t$, $i(t,3) := j_t+1$ en $i(t,4) := i_t+1$, als $\varepsilon_t = -1$



$\varepsilon_t = +1$



$\varepsilon_t = -1$

Nu is: $Y_{i_{t+1}} = Y_{j_t} Y_{i_t} Y_{j_t+1}^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $Y_{i(t,1)} = Y_{i(t,3)} Y_{i(t,4)} Y_{i(t,2)}^{-1}$ als $\varepsilon_t = +1$

en: $Y_{i_{t+1}} = Y_{j_t}^{-1} Y_{i_t} Y_{j_t+1}$ $\Leftrightarrow$ $Y_{i_t} = Y_{j_t} Y_{i_t+1} Y_{j_t+1}^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $Y_{i(t,1)} = Y_{i(t,2)} Y_{i(t,4)} Y_{i(t,3)}^{-1}$ als $\varepsilon_t = -1$

Ook is: $Y_{t_2} = Y_{t_3}$ $\Leftrightarrow$ $Y_{j_t} = Y_{j_t+1}$

Dus $Y_{i(t,2)} = Y_{i(t,3)}$ en $Y_{i(t,1)} = Y_{i(t,3)} Y_{i(t,4)} Y_{i(t,2)}^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $Y_{j_t} = Y_{j_t+1}$ en $Y_{i_t+1} = Y_{j_t}^{\varepsilon_t} Y_{i_t} Y_{j_t+1}^{-\varepsilon_t}$

Verder is $i_{t-1} < j_t < i_t$ en is iedere relatie $y_i = y_{i+1}$ met $i_{t-1} < i < i_t$ van de vorm $y_{i(t',2)} = y_{i(t',3)}$ voor zekere $1 \le t' \le n$.

Dus de presentatie (t) is equivalent met:

$$\langle y_i,\ 1 \le i \le 2n \mid y_{i(t,2)} = y_{i(t,3)},\ 1 \le t \le n,\ y_{i(t,1)} = y_{i(t,3)}\, y_{i(t,4)}\, y_{i(t,2)}^{-1},\ 1 \le t \le n \rangle$$

Geven we met $\| x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \|$ de groep aan die wordt voorgesteld door de presentatie $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle$ en stellen we $\Phi(y_i) := u_{\alpha_i} \cdot u_{\beta_i}^{-1}$, $1 \le i \le 2n$, dan definieert Φ een groepsmorfisme

$$\| y_i,\ 1 \le i \le 2n \mid y_{i(t,2)} = y_{i(t,3)},\ 1 \le t \le n,\ \ y_{i(t,1)} = y_{i(t,3)}\, y_{i(t,4)}\, y_{i(t,2)}^{-1} \quad 1 \le t \le n \|$$

$$\downarrow \Phi$$

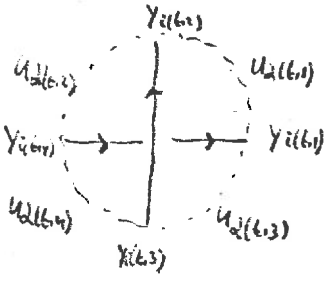
$$\| u_\alpha,\ \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1,\ \ u_{\alpha(t,1)} \cdot u_{\alpha(t,2)}^{-1} = u_{\alpha(t,3)} \cdot u_{\alpha(t,4)}^{-1} \|.$$

die we weer met Φ aangeven, want:

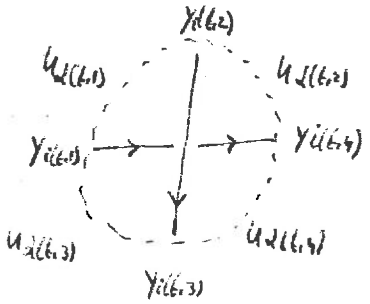
$$\Phi(y_{i(t,2)}) = u_{\alpha(t,1)}\, u_{\alpha(t,2)}^{-1} = u_{\alpha(t,3)}\, u_{\alpha(t,4)}^{-1} = \Phi(y_{i(t,3)}) \quad \text{en}$$

$$\Phi(y_{i(t,3)}\, y_{i(t,4)}\, y_{i(t,2)}^{-1}) = u_{\alpha(t,3)}\, u_{\alpha(t,4)}^{-1} \cdot u_{\alpha(t,4)}\, u_{\alpha(t,2)}^{-1} \cdot (u_{\alpha(t,1)}\, u_{\alpha(t,2)}^{-1})^{-1} = u_{\alpha(t,3)}\, u_{\alpha(t,1)}^{-1}$$

$$= \Phi(y_{i(t,1)})$$



$\varepsilon_t = +1$



$\varepsilon_t = -1$

Verduidelijken we nu het voorafgaande aan de hand van een voorbeeld:

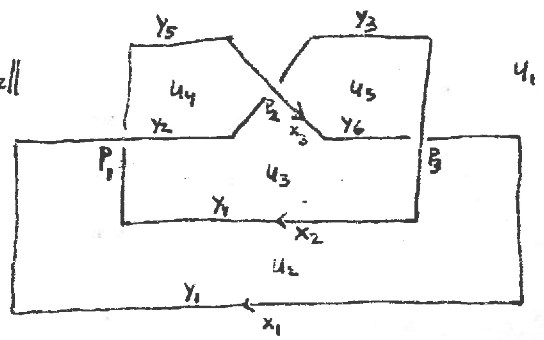
$$\| x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3,\ x_3 = x_2^{-1} x_1 x_2,\ x_1 = x_2^{-1} x_3 x_2 \|$$

$$g \downarrow\uparrow f$$

$$\| y_1, \dots, y_6 \mid y_2 = y_1,\ y_5 = y_6,\ y_3 = y_4,\ y_5 = y_4^{-1} y_1 y_2,\ y_3 = y_5^{-1} y_2 y_6,\ y_1 = y_3^{-1} y_6 y_4^{-1} \|$$

$$\wr\!\text{S}$$

$$\| y_1, \dots, y_6 \mid y_2 = y_1,\ y_5 = y_6,\ y_3 = y_4,\ y_4 = y_2 y_5 y_1^{-1},\ y_2 = y_6 y_3 y_5^{-1} \| \xrightarrow{\Phi} \| u_1, \dots, u_5 \mid u_1 = 1,\ u_2 u_1^{-1} = u_3 u_4^{-1},\ u_4 u_1^{-1} = u_3 u_5^{-1},\ u_5 u_1^{-1} = u_3$$



<u>opm. 1</u> Φ is in dit vb een isomorfisme, want:

stel $\Psi(u_1) := 1$, $\Psi(u_2) := y_1$, $\Psi(u_3) := y_2 y_5$, $\Psi(u_4) = y_5$, $\Psi(u_5) := y_3$,

dan is $\Psi(u_1) = 1$ terwijl $u_1 = 1$. en

$$\Psi(u_2 u_1^{-1}) = y_1 = y_2 = y_2 y_5 \cdot y_5^{-1} = \Psi(u_3 u_4^{-1})$$
$$\Psi(u_4 u_1^{-1}) = y_5 = y_6 = y_2 y_5 y_3^{-1} = \Psi(u_3 u_5^{-1})$$
$$\Psi(u_5 u_1^{-1}) = y_3 = y_4 = y_2 y_5 y_1^{-1} = \Psi(u_3 u_2^{-1})$$

Dus Ψ definieert een groepsmorfisme, Ψ is de inverse van Φ.

Dus Φ is een groepsisomorfisme.

<u>opm. 2</u> In de presentatie $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3,\ x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1,\ x_1 = x_2^{-1} x_3 x_2 \rangle$ kan één van de drie relaties weggelaten worden, want

bv.: $x_1 = x_2^{-1} x_3 x_2$, $x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 \Rightarrow x_3 = x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_2 \cdot x_2^{-1} x_3 x_2 \Rightarrow x_3 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_2$

dus: $x_3^{-1} x_1 x_3 = x_3^{-1} \cdot x_2^{-1} x_3 x_2 \cdot x_3 = x_3^{-1} x_2^{-1} \cdot x_2 x_3 x_2 = x_2$, dus de eerste is een gevolg van de tweede en derde.

<u>opm. 3</u> Deze twee eigenschappen gelden ook in het algemeen. Er geldt nl.:

<u>Stelling (7.1)</u> Laat k een polygoon knoop zijn en $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$, regulier mbt k en $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$, $\{x_i \mid 1 \le i \le n\}$, gedefinieerd als in het voorafgaande.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\| x_t,\ 1 \le t \le n \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t},\ 1 \le t \le n \| \arrow[r] & \| x_t, 1 \le t \le n \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1 \le t \arrow[d, "\tilde{\Phi}"] \arrow[dl, phantom, "\otimes"] \\
& \| u_\alpha,\ \alpha \in A \mid u_0 = 1,\ u_{\alpha(t,1)} u_{\alpha(t,2)}^{-1} = u_{\alpha(t,3)} u_{\alpha(t,4)}^{-1} \| \arrow[ul, "\tilde{\Psi}"]
\end{tikzcd}$$

Dan zijn er isomorfismen $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$ zdd het diagram commutatief wordt.

<u>bew. (7.1)</u> In het geval $n = 0$ is $\pi : k \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, volgens de Jordan kromme stelling, zijn er dan precies twee gebieden in $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(k)$; $n = 0$, dus er zijn geen kruisingen. De bovenste presentatie wordt: $\langle u_0, u_1 \mid u_1 = 1 \rangle$ en de Wirtingerpresentatie wordt $\langle x_1 \mid \ \rangle$, want er is precies één samenhangscomponent na het weglaten van de P_i^2, nl $k = x_1$, deze beide presentaties zijn equivalent, dus we mogen in het vervolg $n \ge 1$ veronderstellen, zoals op de vorige bladzijden ook is aangenomen.

(i) De presentaties (1), (2) en (3) zijn equivalent. Het weglaten van de relatie $x_1 = x_{j_n}^{\varepsilon_n} x_n x_{j_n}^{-\varepsilon_n}$ in (1) komt neer op het weglaten van de relatie $y_{i_{n+1}} = y_{j_n}^{\varepsilon_n} y_{i_n} y_{j_{n+1}}^{-\varepsilon_n}$ in (2) en op het weglaten van de relatie : $y_{i(n,1)} = y_{i(n,3)} y_{i(n,4)} y_{i(n,2)}^{-1}$ in (3)

Dus het is voldoende te laten zien dat Φ in

$$\| y_i, 1 \le i \le 2n \mid y_{i(t,2)} = y_{i(t,3)}, 1 \le t \le n, \quad y_{i(t,1)} = y_{i(t,3)} y_{i(t,4)} y_{i(t,2)}^{-1}, 1 \le t \le n \|$$

$$\downarrow \Phi$$

$$\| u_\alpha, \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1, \quad u_{\alpha(t,1)} u_{\alpha(t,2)} = u_{\alpha(t,3)} u_{\alpha(t,4)} \|, 1 \le t \le n \|$$

met $\Phi(y_i) = u_{\alpha_i} u_{\beta_i}^{-1}$ een isomorfisme van groepen is (we geven dit morfisme $y_i \mapsto u_{\alpha_i} u_{\beta_i}^{-1}$ weer met Φ aan)

Daartoe laten we zien dat:

$$\| y_i, 1 \le i \le 2n \mid y_{i(t,1)} = y_{i(t,3)} y_{i(t,4)} y_{i(t,2)}^{-1}, 1 \le t \le n \| \xrightarrow{\varphi} \| u_\alpha, \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1 \|$$
$$y_i \longmapsto u_{\alpha_i} u_{\beta_i}^{-1}$$

een isomorfisme is, en omdat $\varphi(y_{i(t,2)}) = u_{\alpha(t,1)} u_{\alpha(t,2)}^{-1}$ en $\varphi(y_{i(t,3)}) = u_{\alpha(t,3)} u_{\alpha(t,4)}^{-1}$, gaat via φ de relatie $y_{i(t,2)} = y_{i(t,3)}$ over in de relatie $u_{\alpha(t,1)} u_{\alpha(t,2)}^{-1} = u_{\alpha(t,3)} u_{\alpha(t,4)}^{-1}$. Maw.: als φ een isomorfisme is, dan is Φ het ook.

(ii) Laat $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ de éénpunts compactificatie van $\mathbb{R}^2$ zijn, dan is $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, $\mathcal{Y} := (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}) \setminus \{P_n\} \cong S^2 \setminus \{pt.\} \cong \mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ heeft precies één onbegrensde samenhangscomponent, (omdat $\pi(K)$ compact is) noem deze u_{α_∞}, dan is $\forall \alpha \in A, \alpha \ne \alpha_\infty$ u_α een samenhangscomponent van $\mathcal{Y} \setminus \pi(K)$, en $u_{\alpha_\infty} \cup \{\infty\}$ ook.

Zij $W_\alpha := u_\alpha$ als $\alpha \ne \alpha_\infty$ en $W_\alpha := u_{\alpha_\infty} \cup \{\infty\}$ als $\alpha = \alpha_\infty$, dan is $\{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de collectie samenhangscomponenten van $\mathcal{Y} \setminus \pi(K)$.

Aangetoond kan worden dat er voor iedere i, $1 \le i \le 2n$, een open samenhangende verzameling Y_i^ε is, zodd.

$Y_i^\varepsilon \cap Y_j^\varepsilon = \phi$ als $i \ne j$ en $y_i \subset Y_i^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$ en

$Y_i^\varepsilon \setminus y_i = a_i \cup b_i$, a_i en b_i samenhangend en open en

$a_i \subset u_{\alpha_i}$, a_i ligt rechts van y_i en

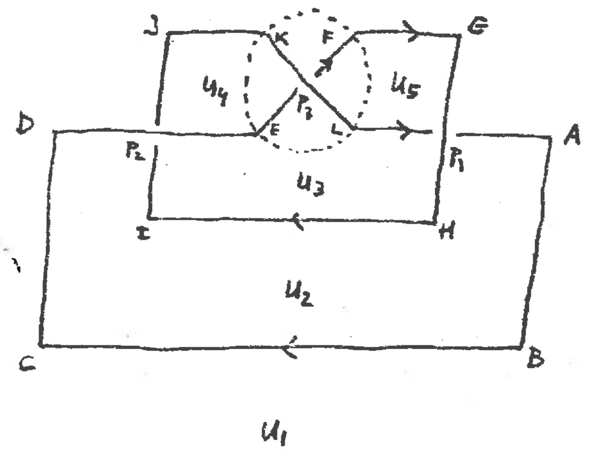
$b_i \subset u_{\beta_i}$, b_i ligt links van y_i.

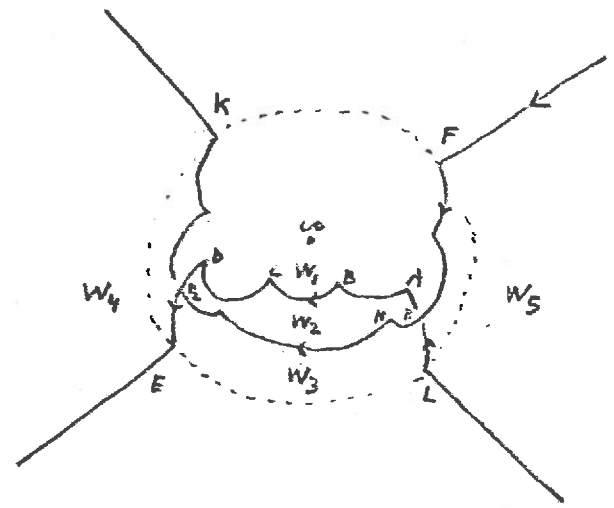
$Y_{i(t,2)}^\varepsilon \cap Y_{i(t,3)}^\varepsilon \subset V_t$

Vergroten we nu de verzamelingen W_α tot W_α^ε door:

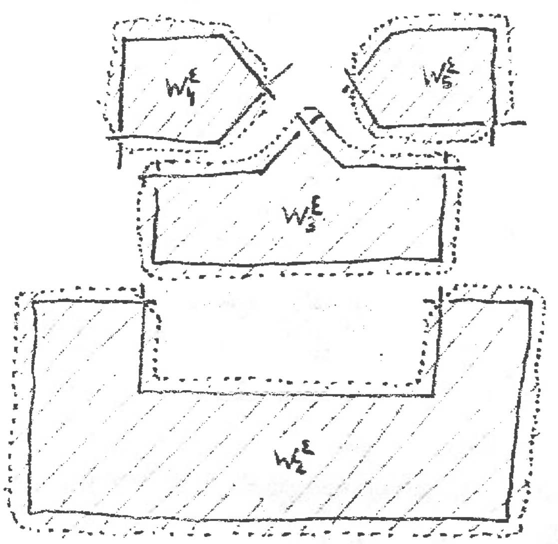
$$W_\alpha^\varepsilon := W_\alpha \cup \{\gamma_i^\varepsilon \mid 1 \le i \le 2n \text{ en } \alpha_i = \alpha \text{ of } \beta_i = \alpha\} \cup \{V_t \mid 1 \le t \le n \text{ en } \alpha = \alpha(t,2) \text{ of } \alpha = \alpha(t,3)\}.$$

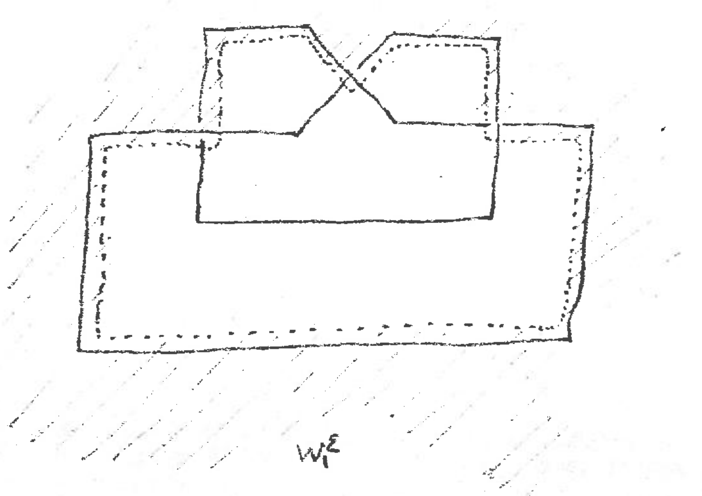
<u>Intermezzo</u>: In ons voorbeeld ziet dat er alsvolgt uit:





Als we de 2-sfeer S' in de $\mathbb{R}^3$, met middelpunt P_3 en straal $\overline{P_3L}$ als model voor $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ nemen, N:= het punt op S' boven P_3 in de $\mathbb{R}^3$ en Z het punt onder P_3 op S' in $\mathbb{R}^3$, dan is links een kaart voor $S' \setminus \{Z\}$ getekend en rechts is een kaart van $S' \setminus \{N\}$ (Stereografische projectie vanuit N resp. Z op het xy-vlak). De gestippelde lijn is de doorsnijdingscirkel van het xy-vlak met de 2-sfeer S' in de $\mathbb{R}^3$. Op beide kaarten is de projectie van K: $\pi(K)$ getekend.
We geven op de linkerkaart aan hoe de W_α^ε er in dit voorbeeld uitzien:





(iii) Zij $\mathcal{W} := \{ W_\alpha^\varepsilon \mid \alpha \in A \}$, dan is $\mathcal{W}$ een open overdekking van $\mathcal{Y}$, met samenhangende deelverzamelingen,
want: W_α is open en samenhangend, V_t is open en samenhangend en Y_i^ε ook, als $\alpha = \alpha(t,j)$ dan is $W_\alpha \cap V_t \neq \emptyset$ voor $j = 2,3$;
en als $\alpha = \alpha_i$ of $\alpha = \beta_i$ dan is $W_\alpha \cap Y_i^\varepsilon \neq \emptyset$

$W_\alpha^\varepsilon = W_\alpha \cup \bigcup\{ Y_i^\varepsilon \mid 1 \le i \le 2n$ en $\alpha = \alpha_i$ of $\alpha = \beta_i \} \cup \bigcup\{ V_t \mid 1 \le t \le n$ en $\alpha = \alpha(t,2)$ of $\alpha = \alpha(t,3) \}$

dus W_α^ε is open en samenhangend in S^2

$Y_i^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$, dus $P_n \notin Y_i^\varepsilon$ en $t < n$ dus $W_\alpha^\varepsilon \subset S^2 \setminus \{P_n\}$, dus W_α^ε is een open samenhangende deelverzameling van $\mathcal{Y}$.

$\mathcal{W}$ is een overdekking van $\mathcal{Y}$, want: stel $P \in \mathcal{Y}$, als $P = \infty$ dan is $P \in W_{\alpha_\infty} \subset W_{\alpha_\infty}^\varepsilon \in \mathcal{W}$, als $P \neq \infty$ dan is $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_n\}$, als $P \in D$ dan is er een t, $t \neq n$ met $P = P_t$, dus $P = P_t \in V_t \subset V_t^\varepsilon \in \mathcal{W}$, als $P \in \pi(K) \setminus D$, dan is er een i, $1 \le i \le 2n$, met $P \in Y_i$, dus $P \in Y_i \subset Y_i^\varepsilon \in W_{\alpha_i}^\varepsilon \in \mathcal{W}$.
Als $P \notin \pi(K)$, dan is er een $\alpha \in A$, met $P \in W_\alpha$, dus $P \in W_\alpha \subset W_\alpha^\varepsilon \in \mathcal{W}$.

Dus $\mathcal{W}$ is een overdekking van $\mathcal{Y}$.

(iv) Zij $\Sigma_{\mathcal{W}}$ het abstracte simplicial complex behorend bij de overdekking $\mathcal{W}$. Laat $\tilde{\Sigma}$ de universele (simpliciale) overdekking van $\Sigma_{\mathcal{W}}$ zijn, volgens §5 is dan $F|\tilde{\Sigma}|$ een overdekking van $\mathcal{Y}$ en $\pi_1(\Sigma_{\mathcal{W}}) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma}/\Sigma_{\mathcal{W}}) \cong \mathrm{Aut}(F|\tilde{\Sigma}|/\mathcal{Y})$, maar $\mathcal{Y} \cong \mathbb{R}^2$, dus $F|\pi| : F|\tilde{\Sigma}| \to \mathcal{Y}$ is een homeomorfisme, dus $\mathrm{Aut}(F|\tilde{\Sigma}|/\mathcal{Y}) \cong \{1\}$, dus

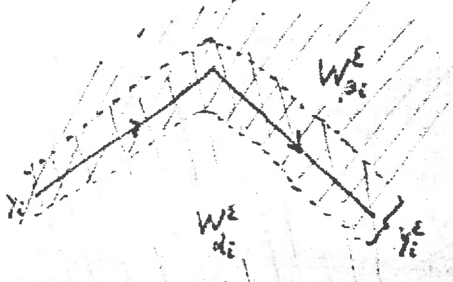
$\pi_1(\Sigma_{\mathcal{W}}) \cong \{1\}$

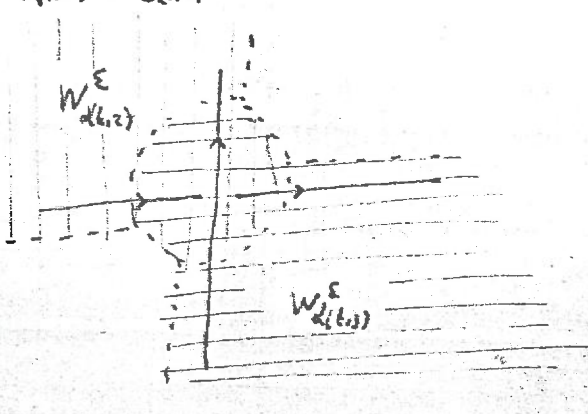
(v) Gaan we nu na hoe $\Sigma_{\mathcal{W}}$ er uit ziet:

$\Sigma_{\mathcal{W}}^0 = A$, want $\mathcal{W} = \{ W_\alpha^\varepsilon \mid \alpha \in A \}$

Verder is:

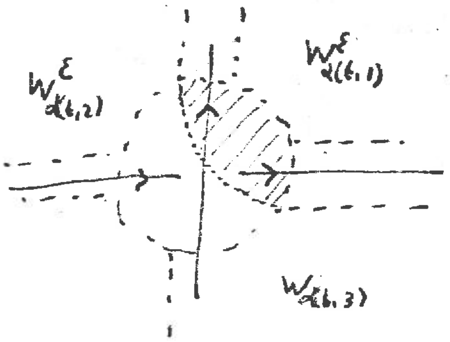
$\Sigma_{\mathcal{W}}^1 = \{ (\alpha_i, \beta_i, Y_i^\varepsilon) \mid 1 \le i \le 2n \} \cup \{ (\alpha(t,3), \alpha(t,2), V_t) \mid 1 \le t < n \}$

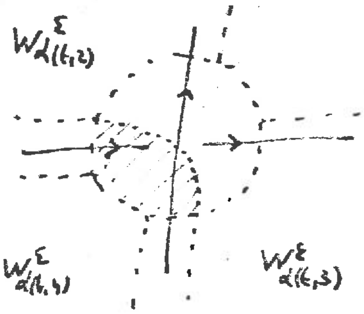




$$\Sigma^2_{\mathcal{W}} = \{(\alpha(t,3),\ \alpha(t,4),\ \alpha(t,2),\ \bigcap_{i=2}^{4} W_{\alpha(t,i)}) \mid 1 \le t < n\} \cup$$

$$\cup \{(\alpha(t,3),\ \alpha(t,1),\ \alpha(t,2),\ \bigcap_{i=1}^{3} W_{\alpha(t,i)} \mid 1 \le t < n\}$$





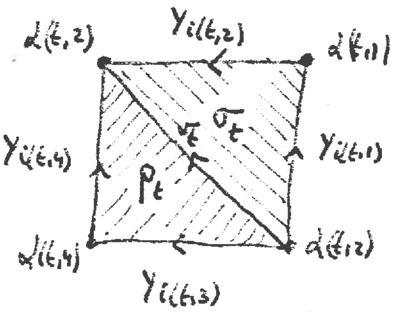
Maken we de volgende afkortingen:

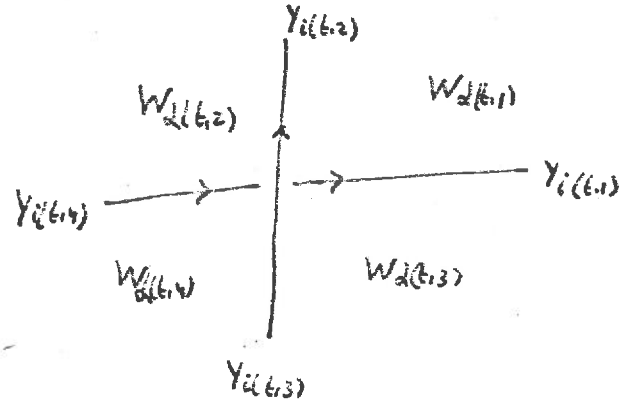
$\gamma_i := (\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i^{\varepsilon})$ $\quad 1 \le i \le n$ $\quad$ (we gebruiken γ_i voor het gemak nog een keer)

$v_t := (\alpha(t,3),\ \alpha(t,2),\ V_t)$

$\sigma_t := (\alpha(t,3),\ \alpha(t,4),\ \alpha(t,2),\ \bigcap_{i=2}^{4} W_{\alpha(t,i)})$

$\rho_t := (\alpha(t,3),\ \alpha(t,1),\ \alpha(t,2),\ \bigcap_{i=1}^{3} W_{\alpha(t,i)})$





Definieer nu het asc Σ als volgt:

$\Sigma^0 := \Sigma^0_{\mathcal{W}} \cup \{*\}$

$\Sigma^1 := \Sigma^1_{\mathcal{W}} \cup \{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ $\quad$ met $d_0 W_\alpha = \alpha$ en $d_1 W_\alpha = *$

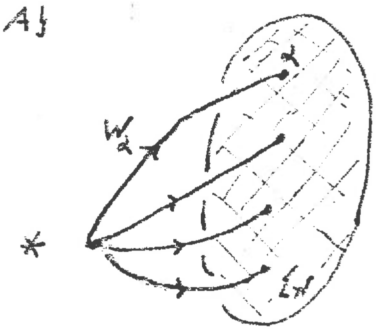
$\Sigma^2 := \Sigma^2_{\mathcal{W}}$,

Nu is B, met $B^0 := \Sigma^0$ en $B^1 := \{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$

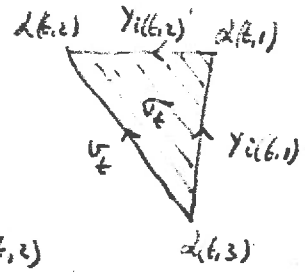
een maximale boom in Σ, dus.

$\Sigma^1 \setminus B^1 = \{\gamma_i \mid 1 \le i \le m\} \cup \{v_t \mid 1 \le t < n\}$

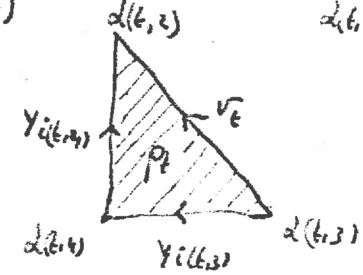
σ_t en $\rho_t \in \Sigma^2$ geven relaties:



σ_t geeft de relatie: $v_t = Y_{i(t,1)} \cdot Y_{i(t,2)}$



ρ_t geeft de relatie: $v_t = Y_{i(t,3)} \cdot Y_{i(t,4)}$



Dus een presentatie voor $\pi_1(\Sigma)$ is:

$\langle Y_i,\ 1 \le i \le n,\ v_t,\ 1 \le t < n \mid v_t = Y_{i(t,1)} Y_{i(t,2)},\ v_t = Y_{i(t,3)} Y_{i(t,4)},\ 1 \le t$

Σ_{γ} is samenhangend, dus voor elke $\alpha \in A$ is er een weg w van α naar α_0, definieer nu:

$\psi(u_\alpha) := (W_\alpha, d_1) \cdot w \cdot (W_{\alpha_0}, d_0)$, dan is $\psi(u_\alpha)$ een lus in Σ, dus $[\psi(u_\alpha)] \in \pi_1(\Sigma, *)$.

Stel w' is een tweede weg in Σ_γ van α naar α_0, dan is w homotoop met w' in Σ_γ, want $\pi_1(\Sigma_\gamma) \cong \{1\}$ volgens (iv) op blz. 7-8, dus $(W_\alpha, d_1) w \cdot (W_{\alpha_0}, d_0)$ is homotoop met $(W_\alpha, d_1) w' (W_{\alpha_0}, d_0)$ in Σ, dus $\psi(u_\alpha)$ is welgedefinieerd modulo homotopie in Σ, ofwel $[\psi(u_\alpha)] \in \pi_1(\Sigma, *)$ is welgedefinieerd.

$\psi(u_{\alpha_0}) = (W_{\alpha_0}, d_1)(W_{\alpha_0}, d_0) \sim 1$, want de lege lus is een weg van α_0 naar α_0 in Σ_γ, dus $[\psi(u_{\alpha_0})] = 1$ in $\pi_1(\Sigma, *)$.

Dus ψ definieert een groeps-morfisme

$\| u_\alpha,\ \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1 \| \longrightarrow \pi_1(\Sigma, *)$, die we weer met ψ zullen aangeven.

$$\pi_1(\Sigma,*) \cong \| Y_i,\ 1 \le i \le 2n,\ v_t,\ 1 \le t < n \mid v_t = Y_{i(t,1)} Y_{i(t,2)},\ v_t = Y_{i(t,3)} Y_{i(t,4)},\ 1 \le t <$$

$$\cong \| Y_i,\ 1 \le i \le 2n \mid Y_{i(t,1)} = Y_{i(t,3)} Y_{i(t,4)} \cdot Y_{i(t,2)}^{-1},\ 1 \le t < n \|$$

Dus $\psi : \langle u_\alpha,\ \alpha \in A \mid u_{\alpha_0} = 1 \| \to \| Y_i,\ 1 \le i \le 2n \mid Y_{i(t,1)} = Y_{i(t,3)} Y_{i(t,4)} Y_{i(t,2)}^{-1},\ 1 \le t <$

$$u_\alpha \mapsto Y_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots Y_{\ell_k}^{\varepsilon_k}$$

waarin $(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_k^{\varepsilon_k})$ een weg in Σ_γ is van α naar α_0 en $a_p = (Y_{\ell_p}, d_1)$ en $\varepsilon_p = \pm 1$, $a_p^{-1} = (Y_{\ell_p}, d_0)$

Nu is: $\varphi \cdot \psi = id$, want:

$\varphi\psi(u_\alpha) = \varphi(\gamma_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{\ell_k}^{\varepsilon_k})$, waarin $(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_k^{\varepsilon_k})$ een weg van α naar α_0 in $\Sigma_{\gamma\gamma}$ is en $a_p = (\gamma_{\ell_p}, \alpha_1)$, $\varepsilon_p = \pm 1$.

$\gamma_p := w(a_p^{\varepsilon_p})$, $\gamma_0 := \alpha$, dan is $\gamma_k = w(a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_k^{\varepsilon_k}) = \alpha_0$

$\psi(\gamma_i) = u_{\alpha_i} u_{\beta_i}^{-1}$ als $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i^{\varepsilon})$

dus $\varphi(\gamma_{\ell_p}) = u_{\alpha(a_p)} u_{w(a_p)}^{-1}$ en $\varphi(\gamma_{\ell_p}^{-1}) = u_{w(a_p)} u_{\alpha(a_p)}^{-1} = u_{\alpha(a_p^{-1})} u_{w(a_p^{-1})}$

dus $\varphi(\gamma_{\ell_p}^{\varepsilon_p}) = u_{\alpha(a_p^{\varepsilon_p})} u_{w(a_p^{\varepsilon_p})}^{-1} = u_{\gamma_{p-1}} u_{\gamma_p}^{-1}$

dus $\varphi(\gamma_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{\ell_k}^{\varepsilon_k}) = u_{\gamma_0} u_{\gamma_1}^{-1} \cdot u_{\gamma_1} u_{\gamma_2}^{-1} \cdot \cdots \cdot u_{\gamma_{k-1}} u_{\gamma_k}^{-1} = u_{\gamma_0} u_{\gamma_k} = u_\alpha u_{\alpha_0}^{-1} = u$

want $u_{\alpha_0} = 1$, dus $\varphi\psi(u_\alpha) = u_\alpha$, dus $\varphi\psi = id$.

Verder is $\psi\varphi = id$, want stel w is een weg van α_i naar α_0, dan is $(\gamma_i, \alpha_1)^{-1} w$ een weg van β_i naar α_0.

Stel $w = (a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_k^{\varepsilon_k})$ en $a_p = (\gamma_{\ell_p}, \alpha_1)$ dan is:

$\psi(u_{\alpha_i}) = \gamma_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{\ell_k}^{\varepsilon_k}$ en $\psi(u_{\beta_i}) = \gamma_i^{-1} \gamma_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{\ell_k}^{\varepsilon_k}$

dus $\psi\varphi(\gamma_i) = \psi(u_{\alpha_i} u_{\beta_i}^{-1}) = \gamma_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{\ell_k}^{\varepsilon_k} \cdot (\gamma_i^{-1} \gamma_{\ell_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{\ell_k}^{\varepsilon_k})^{-1} = \gamma_i$

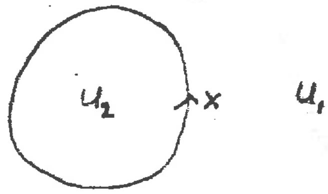
dus $\psi\varphi = id$.

Dus φ is een groeps isomorfisme.

Hiermee is stelling 7.1 bewezen.

§8 Enkele voorbeelden

vb1 Een presentatie voor de triviale knoop is mbv de Dehnpresentatie: $\langle u_1, u_2 \mid u_1 = \rangle \cong \mathbb{Z}$ en mbv de Wirtingerpresentatie: $\langle x \mid \ \rangle \cong \mathbb{Z}$

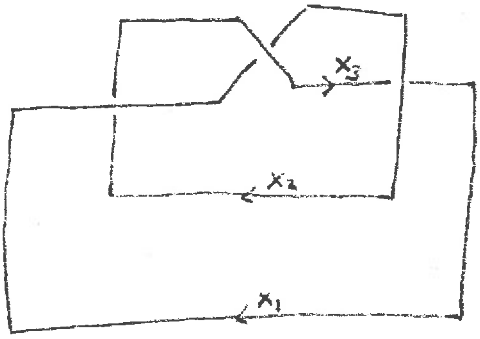


vb2 Een presentatie voor de klaverblad knoop is op blz. 6-4 en 7-4 gegeven. De Wirtinger presentatie is:

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3 \ , \ x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 \rangle$$

vatten we $x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1$ op als een definitie voor x_3, dan gaat $x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3^{-1}$ over in: $x_2 = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 \cdot x_1 \ x_1^{-1} x_2 x_1$ ofwel:

$$x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1$$



K_3

Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_3) \cong \| x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \|$

Definieer $f(x_1) := (13) \in S_3$ en $f(x_2) := (23) \in S_3$, S_3 de permutatiegroep van 3 elementen.

$$f(x_1) f(x_2) f(x_1) = (13)(23)(13) = (12) \quad \text{en} \quad f(x_2) f(x_1) f(x_2) = (23)(13)(23) = (12),$$

dus f induceert een groepsmorfisme $\tilde{f}$.

$\tilde{f}: \| x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \| \longrightarrow S_3$, $\tilde{f}$ is surjectief, want (13) en (23) brengen S_3 voort, S_3 is niet abels, dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_3)$ is niet abels, dus $\not\cong \mathbb{Z}$, dus K_3 is niet abels

opm. De klaverblad knoop is een zgn. (2,3) torusknoop (zie §10), volgens gevolg. 10.4 heeft deze knoop de presentatie

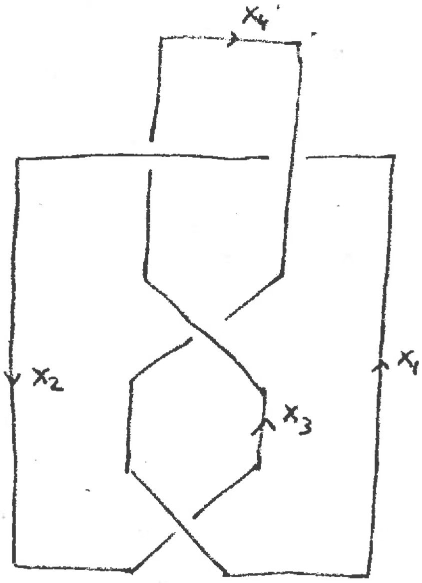
$$\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$$

In dit geval is het direct te zien: neem $a = x_1 x_2 x_1$ en $b = x_1 x_2$

vb. 3 Die figuurachtknoop K_4.

De Wirtingerpresentatie behorend bij deze projectie van K_4 (zie figuur) is:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_2 = x_4 x_1 x_4^{-1} \ , \ x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 \ , \ x_4 = x_2 x_3 x_2^{-1} \rangle.$$



Vatten we de relatie $x_3 = x_1^{-1} x_2 x_1$ op als definitie voor x_3, dan wordt

$x_4 = x_2 x_3 x_2^{-1} = x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1}$, dus

$x_2 = x_4 x_1 x_4^{-1} = x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 \underbrace{x_2^{-1} \cdot x_1 \cdot x_2 x_1^{-1}} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1}$

dus: $x_1 \cdot \underbrace{x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1}} = \underbrace{x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1}} x_2$

Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4) \cong \| x_1, x_2 \mid x_1 [x_2^{-1}, x_1] = [x_2^{-1}, x_1] x_2 \|$

Zij S_5 de permutatiegroep van 5 elementen

en $g(x_1) := (13)(45)$ en $g(x_2) := (12)(35)$

dan is: $g(x_2)^{-1} g(x_1) g(x_2) g(x_1)^{-1} = (14253)$

en $g(x_1) \cdot [g(x_2)^{-1}, g(x_1)] = (13)(45)(14253) = (15)(24)$

en $[g(x_2)^{-1}, g(x_1)]\, g(x_2) = (14253)(12)(35) = (15)(24)$,

dus g induceert een groepsmorfisme $\tilde{g}$,

$\tilde{g} : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4) \to S_5$, met een niet abels beeld,

want $[g(x_2)^{-1}, g(x_1)] = (14253) \neq 1$. Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4)$ is niet abels.

dus K_4 is niet triviaal.

We tonen nu aan dat $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4)$ niet S_3 als quotient heeft.
Stel nl dat f een groepsmorfisme van $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4)$ op S_3 is.
Stel $f(x_1)$ heeft orde 3, dan heeft $f(x_2)$ ook orde 3, want $x_2 = x_4 x_1 x_4^{-1}$,
maar x_1 en x_2 brengen G voort, $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4)$, dus $f(G) \subset \{1, (123), (132)\}$,
dus $f(G) \neq S_3$, dus f is geen surjectie. Evenzo als $f(x_1)$ orde 1 heeft. Blijft over $f(x_1)$ (en dus ook $f(x_2)$) heeft orde 2.
Stel $f(x_1) = (12)$, als $f(x_2) = (12)$ dan is $f(G) \subset \{1, (12)\} \neq S_3$, dus
$f(x_1) \neq f(x_2)$, na eventueel hernummeren, mogen we veronderstellen
dat $f(x_1) = (12)$ en $f(x_2) = (23)$, dan is

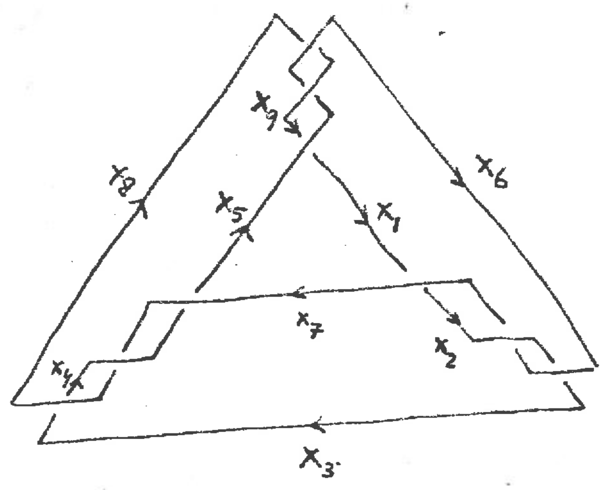
$[f(x_2)^{-1}, f(x_1)] = (23)(12)(23)(12) = (123)$

$f(x_1)\, [f(x_2)^{-1}, f(x_1)] = (12)(123) = (23)$

$[f(x_2)^{-1}, f(x_1)]\, f(x_2) = (123)(23) = (12)$, dus $f(x_1 [x_2^{-1}, x_1]) \neq f([x_2^{-1}, x_1] x_2)$

tegenspraak. Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4)$ heeft S_3 niet als quotient, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_3)$ wel. dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_4) \not\cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_3)$, dus K_4 en K_3 zijn niet equivalent.

vb 4 De groep van de knoop K_7 heeft als presentatie:



$$\left\langle x_1, \dots, x_9 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_2 = x_7^{-1} x_1 x_7 , & x_3 = x_6^{-1} x_2 x_6 \\ x_4 = x_8 x_3 x_8^{-1} , & x_5 = x_7 x_4 x_7^{-1} \\ x_6 = x_9 x_5 x_9^{-1} , & x_7 = x_2^{-1} x_6 x_2 \\ x_8 = x_4 x_7 x_4^{-1} , & x_9 = x_6 x_8 x_6^{-1} \end{array} \right\rangle$$

$x := x_8 \quad , \quad y := x_6 \quad , \quad z := x_3$

$x_9 = x_6 x_8 x_6^{-1} = y x y^{-1}$,

$x_4 = x_8 x_3 x_8^{-1} = x z x^{-1}$,

$x_8 = x_4 x_7 x_4^{-1} \Rightarrow \quad x_7 = x_4^{-1} x_8 x_4^{-1} = x z^{-1} x^{-1} . x . x z x^{-1} = x z^{-1} x z x^{-1}$,

$x_3 = x_6^{-1} x_2 x_6 \Rightarrow \quad x_2 = x_6 x_3 x_6^{-1} = y z y^{-1}$,

$x_6 = x_9 x_5 x_9^{-1} \Rightarrow \quad x_5 = x_9^{-1} x_6 x_9 = y x^{-1} y^{-1} . y . y x y^{-1} = y x^{-1} y x y^{-1}$,

$x_2 = x_7^{-1} x_1 x_7 \Rightarrow \quad x_1 = x_7 x_2 x_7^{-1} = x z^{-1} x z x^{-1} . y z y^{-1} . x z^{-1} x^{-1} z x^{-1}$,

Nu blijven de relaties $x_5 = x_7 x_4 x_7^{-1}$ en $x_7 = x_2^{-1} x_6 x_2$ over, die gaan over in:

$$y x^{-1} y x y^{-1} = x_5 = x_7 x_4 x_7^{-1} = x z^{-1} x z x^{-1} . \underbrace{x z x^{-1} . x z^{-1} x^{-1}} z x^{-1} = x z^{-1} x z x^{-1} z x^{-1}$$

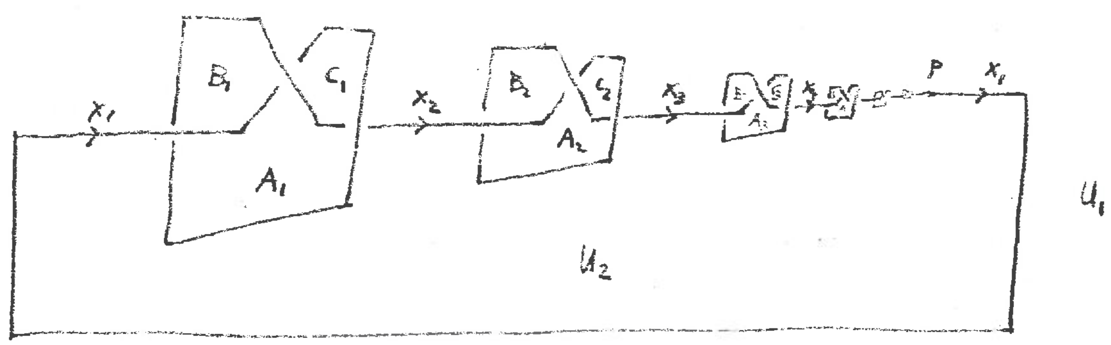
en:

$$x z^{-1} x z x^{-1} = x_7 = x_2^{-1} x_6 x_2 = y z^{-1} y^{-1} . y . y z y^{-1} = y z^{-1} y z y^{-1} .$$

Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_7) \cong \| x, y, z \mid y [x^{-1}, y] x = x [z^{-1}, x] z \; , \; x [z^{-1}, x] = y [z^{-1}, y] \|$

We zullen in §9 zien dat K_7 niet triviaal is en niet equivalent is met K_3 noch met K_4.

vb 6



De Dehnpresentatie van de projectie van bovenstaande knoop k is:

$\langle A_i, B_i, \; , u_1, u_2, i \in \mathbb{N} \mid u_1 = 1 \, , \, C_i u_1^{-1} = A_i u_2^{-1} \, , \, u_2 u_1^{-1} = A_i B_i^{-1} \, , \, B_i u_1^{-1} = A_i C_i^{-1} \, , \, i \in \mathbb{N} \rangle$

$u_1 = 1$, dus $C_i = A_i u_2^{-1}$, $u_2 = A_i B_i^{-1}$, $B_i = A_i C_i$

stel $x := u_2$, dan is $C_i = A_i u_2^{-1} = A_i x^{-1}$, dus $A_i = C_i x$

en: $x = u_2 = A_i B_i^{-1}$ dus $B_i = x^{-1} A_i = x^{-1} C_i x$

$B_i = A_i C_i^{-1}$ dus $x^{-1} C_i x = C_i x C_i^{-1}$ dus $C_i x C_i = x C_i x$

Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \| x, C_i, i \in \mathbb{N} \mid C_i x C_i = x C_i x \|$.

Zij $S_{(\infty)} := \{ \sigma \mid \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie, zodat $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \sigma(m) = m \}$

, definieer $f(x) := (12)$ en $f(C_i) := (1i)$, dan is:

$$f(x) f(C_i) f(x) = (12)(1i)(12) = (2i) \quad \text{en} \quad f(C_i) f(x) f(C_i) = (1i)(12)(1i) = (2i)$$

Dus f definieert een groepsmorfisme van G naar $S_{(\infty)}$, $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

Als K een tamme knoop is, dan heeft $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ een eindige Wirtinger presentatie (stelling 7.1), stel $g_1, \dots, g_k$ brengen G voort, dan is voor alle $1 \leq i \leq k$, $f(g_i) \in S_{(\infty)}$, dus er is een $n_i \in \mathbb{N}$ met $\forall m \geq n_i$ $(f(g_i))(m) = m$, laat $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_k\}$, dan is $\forall g \in G$: $(f(g))(m) = m$, $\forall m \geq n_0$, maar $C_{n_0+1} \in G$ en

$f(C_{n_0+1}) = (1 \; n_0+1)$, dus $(f(C_{n_0+1}))(n_0+1) = 1 \neq n_0+1$ en $n_0+1 > n_0$,

tegenspraak. Dus de knoop k is wild.

<u>Def</u> Zij X een topologische ruimte en $P \in \bar{U}$, U open in X,
Als voor iedere open verzameling W in X, $P \in W$ er een open verzameling W' is zodat

(i) $P \in W' \subset W$

(ii) voor iedere tweetal lussen w_1 en w_2 in $U \cap W'$ met basispunt $P_0 \in U \cap W'$ geldt: $w_1 w_2$ homotoop met $w_2 w_1$ in $U \cap W'$. (ofwel: $\forall P_0 \in U \cap W'$: $\pi_1(U \cap W', P_0)$ is commutatief)

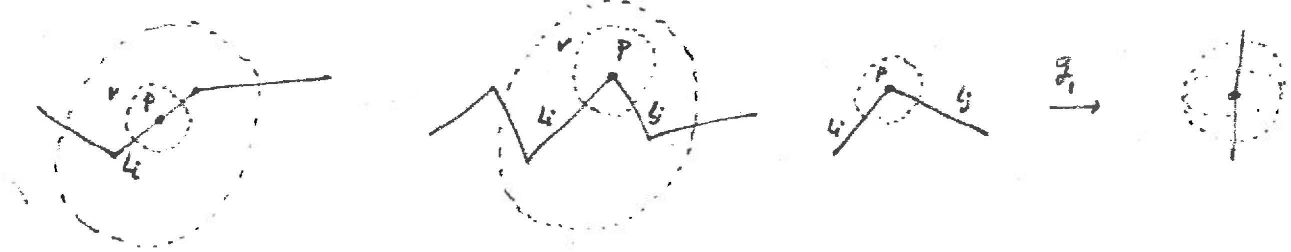
Dan heet U <u>lokaal commutatief in P</u>.

<u>Opm.</u> Als $P \in \bar{U} \subset X$, U open, $h : X \to Y$ een homeomorfisme, dan geldt
U is lokaal commutatief in $P \Rightarrow h(U)$ is lokaal commutatief in $h(P)$
Het bewijs is een makkelijke oefening.

<u>Lemma (8.1)</u> Zij K een knoop in $\mathbb{R}^3$ en $P \in \tau(K)$, dus K is lokaal tam in P, dan is $(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ lokaal commutatief in P.

<u>bewijs (8.1)</u> K is lokaal tam in P, dus volgens de definitie van lokaal tam (blz. 3-2) zijn er open verzamelingen U en V in $\mathbb{R}^3$, $P \in U$,

en is er een homeomorfisme $g: U \to V$ en een polygoon L, zdd $g(U\cap K) = V\cap L$, $P\in U\cap K$ dus $g(P)\in V\cap L$, nu is L een polygoon. dus de eindige vereniging van rechte lijnstukken L_i, $L=\cup\{L_i \mid 1\le i\le n\}$. Nu is $g(P)\in L_i$ voor zekere i of $\{g(P)\} = L_i\cap L_j$ voor $i\ne j$. We kunnen in het eerste geval U en V zo verkleinen dat $g(U\cap K) = V\cap L_i$ en in het tweede geval U en V zo verkleinen dat $g(U\cap K) = V\cap(L_i\cup L_j)$



$\exists\varepsilon>0$: $U_\varepsilon(P)\subset V$ en er is een homeomorfisme $g_1: U_\varepsilon(P)\to U_1(\vec 0)$ zdd $g_1(U_\varepsilon(P)\cap L_i) = U_1(0)\cap L_z$ in het eerste en $g_1(U_\varepsilon(P)\cap(L_i\cup L_j)) = U_1(0)\cap L_z$ in het tweede geval, waarin $L_z := \{(0,0,z) \mid -1\le z\le +1\}$ en $g_1(g(P)) = \vec 0$. Neem nu $U_1(0)$ ipv V en $g^{-1}g_1^{-1}(U_1(0))$ ipv V en $g_1 g$ ipv g, dan kunnen we samenvattend zeggen: als K lokaal tam in P is, dan is er een open omgeving U van P en een homeomorfisme $g: U\to U_1(0)$ zdd $g(U\cap K) = U_1(0)\cap L_z$.

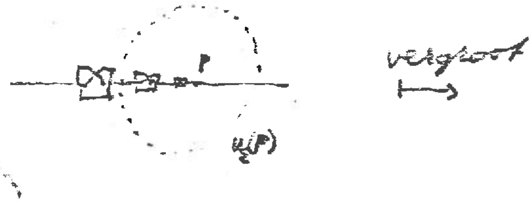
We bewijzen nu dat K lokaal commutatief is in P: stel W is een open verzameling in $\mathbb{R}^3$ en $P\in W$, dan is $P\in U\cap W$ is open, dus $g(U\cap W)$ is een open omgeving van $g(P)=\vec 0$, dus er is een $\delta>0$ zdd. $U_\delta(0)\subset g(U\cap W)$, zij $W' := g^{-1}(U_\delta(0))$, dan is $W'\cap(\mathbb{R}^3\setminus K) = W'\setminus K$, $g(U\cap K) = U_1(0)\cap L_z$, dus $g(W'\setminus K) = U_\delta(0)\setminus L_z$ en $g|(W'\setminus K): W'\setminus K \to U_\delta(0)\setminus L_z$ is een homeomorfisme, dus $\forall P_0 \in W'\cap(\mathbb{R}^3\setminus K)$ is $\pi_1(W'\cap(\mathbb{R}^3\setminus K), P_0) \cong \pi_1(U_\delta(0)\setminus L_z, g(P_0))$ $\cong \mathbb{Z}$, is commutatief, dus $\mathbb{R}^3\setminus K$ is lokaal commutatief in P.

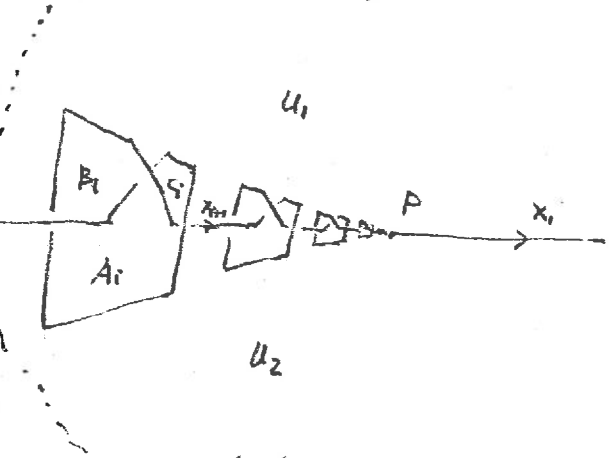
opm. Lemma (8.1) geeft ons dus een criterium om te zien of een knoop K lokaal tam is in P, dus ihb of de knoop tam is.

We passen dit toe op vb. 6:

vb 6' Aan de figuur is te zien dat de knoop K van vb. 6 overal behalve misschien in P, lokaal tam is, we weten al dat de knoop wild is (blz. 8-4), als K ook lokaal tam in P is, dan geldt $\tau(K) = K$, dus K is dan overal lokaal tam, volgens stelling (3.2) is dan K tam. tegenspraak. Dus $W(K) = K\setminus\tau(K) = \{P\}$

We kunnen ook direkt inzien dat k niet locaal tam is in P.
Stel nl dat k locaal tam is in P, neem $W=\mathbb{R}^3$, dan is er een open omgeving W' van P in $\mathbb{R}^3$, zodat $\forall P_0 \in W'\cap(\mathbb{R}^3\setminus K) = W'\setminus K$ geldt: $\pi_1(W'\setminus K, P_0)$ is commutatief. Er is een $\varepsilon>0$ en een $i\in\mathbb{N}$ zodat de rand van $U_\varepsilon(P)$ de knoop in de boog x_i en x snijdt en $U_\varepsilon(P)\subset W'$!





Nu heeft $\pi_1(U_\varepsilon(P)\setminus K, P_0)$ als presentatie: $\langle x, c_j, j\ge i \mid x c_j x = c_j x c_j, j\ge i\rangle$
en wel zo dat het volgende diagram commutatief is:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_\varepsilon(P)\setminus K, P_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal, "S"] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \pi_1(W'\setminus K, P_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K, P_0) \arrow[d, equal, "S"] \\
|x, c_j, j\ge i \mid xc_jx = c_jxc_j, j\ge i| \arrow[r, "i'_*"] \arrow[rr, bend right, "g"] & \pi_1(W'\setminus K, P_0) \arrow[r, "j'_*"] & |x, c_j, j\in\mathbb{N} \mid xc_jx = c_jxc_j, j\in\mathbb{N}|
\end{tikzcd}$$

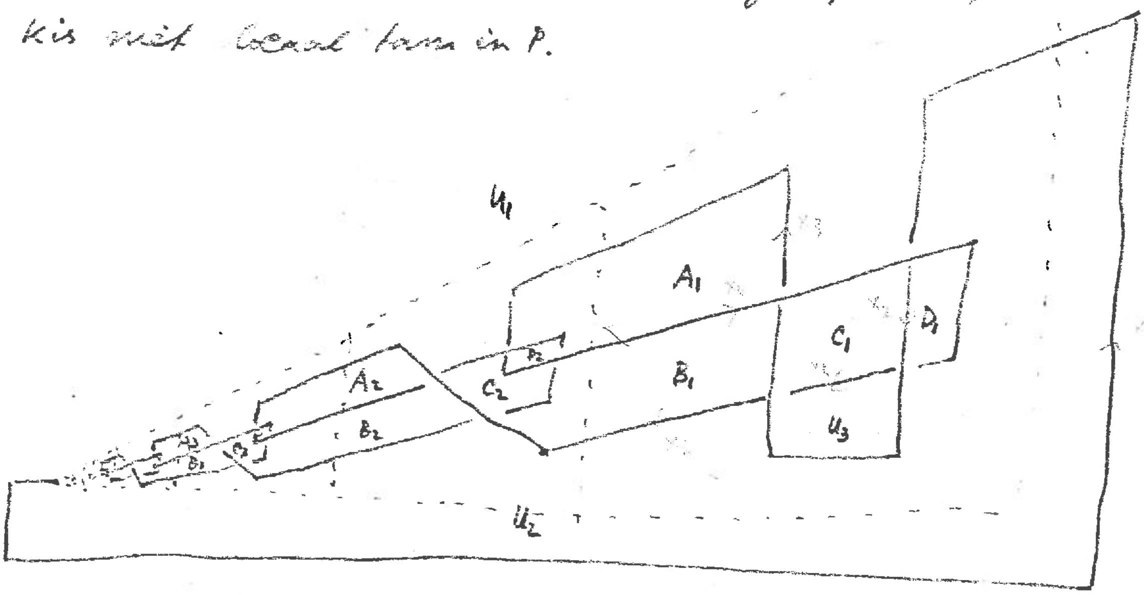
$g(x) = x$, $g(c_j) = c_j$, $\forall j\ge i$,

Laat nu $[w_1] := i'_*(x)$ en $[w_2] := i'_*(c_i)$, als $[w_1][w_2]=[w_2][w_1]$, dan is

$j'_* i'_*([x,c_i]) = j'_*([[w_1],[w_2]]) = j'_*(1) = 1$, maar $j'_* i'_*([x,c_i]) = g([x,c_i]) = [x,c_i] \ne 1$

want $[x,c_i]\ne 1$ in de meest rechtse groep, want $f([x,c_i])\ne 1$ in $S_{(3)}$ (zie blz. 8-
Dus $\pi_1(W'\setminus K, P_0)$ is niet commutatief, tegenspraak.
Dus K is niet locaal tam in P.

<u>vb. 7</u>



De Dehnpresentatie behorend bij de projektie van de knoop k, zoals getekend op de vorige bladzijde is:

$$\langle U_1, U_2, U_3, A_i, B_i, C_i, D_i, i \in \mathbb{N} \mid_{U_1=1,} \begin{array}{l} B_{i+1} A_{i+1}^{-1} = C_{i+1} U_1^{-1}, \quad C_{i+1} U_1^{-1} = D_{i+1} A_i^{-1}, \; B_1 A_1^{-1} = C_1 U_1^{-1}, \; C_1 U_1^{-1} = D_1 U_2^{-1} \\ C_{i+1} B_{i+1}^{-1} = B_i U_2^{-1}, \quad C_{i+1} D_{i+1}^{-1} = B_i A_i^{-1}, \; C_1 B_1^{-1} = U_3 U_2^{-1}, \; C_1 D_1^{-1} = U_3 U_2^{-1} \end{array} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$$

Deze presentatie is equivalent met:

$$\langle U_2, B_i, i \in \mathbb{N} \mid B_{i+1} U_2 B_{i+1}^{-1} = U_2 B_i^{-1}, i \in \mathbb{N} \rangle$$

Want: definieer $\varphi(U_1) = 1$, $\varphi(U_2) = U_2$, $\varphi(U_3) = B_1 U_2 B_1^{-1} U_2$, $\varphi(A_i) = U_2$, $\varphi(B_i) = B_i$

$\varphi(C_i) = B_i U_2^{-1}$ en $\varphi(D_i) = B_i$,

dan is $\varphi(B_{i+1} A_{i+1}^{-1}) = B_{i+1} U_2^{-1} = \varphi(C_{i+1} U_1^{-1})$

$\varphi(C_{i+1} U_1^{-1}) = B_{i+1} U_2^{-1} = \varphi(B_{i+1} A_i^{-1})$ enz. voor alle andere relaties.

Dus φ definieert homomorfisme van de groep die door de eerste presentatie wordt voorgesteld naar die van de tweede

Zij $\psi(B_i) := B_i$ en $\psi(U_2) := U_2$

$U_1 = 1$ dus $C_1 = B_1 A_1^{-1}$, $C_1 = D_1 U_2^{-1}$ en $C_1 B_1^{-1} = U_3 U_2^{-1} = C_1 D_1^{-1}$ dus $B_1 = D_1$

$B_1 A_1^{-1} = C_1 = D_1 U_2^{-1}$ en $B_1 = D_1$ dus $A_1 = U_2$

Inductie hypothese: $A_i = U_2$ en $B_i = D_i$, dan is:

$C_{i+1} B_{i+1}^{-1} = B_i U_2^{-1} = B_i A_i = C_{i+1} D_{i+1}^{-1} \Rightarrow B_{i+1} = D_{i+1}$

en $B_{i+1} A_{i+1}^{-1} = C_{i+1} = D_{i+1} A_i^{-1}$ en $B_{i+1} = D_{i+1}$ dus $A_{i+1} = A_i = U_2$.

met volledige inductie volgt: $B_i = D_i$ en $A_i = U_2$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

$C_{i+1} = B_{i+1} A_{i+1}^{-1} = B_{i+1} U_2^{-1}$

$B_{i+1} U_2^{-1} B_{i+1}^{-1} = C_{i+1} B_{i+1}^{-1} = B_i U_2^{-1}$, dus $B_{i+1} U_2 B_{i+1}^{-1} = B_i U_2^{-1}$, dus ψ definieert een homomorfisme van de tweede groep naar de eerste.

φ en ψ zijn elkaars inverse, dus de twee presentaties zijn equivalent.

Op dezelfde manier als in vb. 6', kan aangetoond worden dat voor $\varepsilon > 0$ $\pi_1(U_\varepsilon(P) \setminus k)$ niet abels is, want $\pi_1(U_\varepsilon \setminus k)$ heeft de groep $\| \langle U_2, B_j, j \geq i \mid B_{j+1} U_2 B_{j+1}^{-1} = U_2 B_j, j \geq i \rangle \|$ als quotient voor zekere $i \in \mathbb{N}$, en wel zo dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_\varepsilon(P) \setminus k) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\circledast"] & & \pi_1(W' \setminus k) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k) \arrow[d, "\cong"] \\
\| \langle U_2, B_j, j \geq i \mid B_{j+1} U_2 B_{j+1}^{-1} = U_2 B_j, j \geq i \rangle \| \arrow[rr] & & \pi_1(W' \setminus k) \arrow[r] & \| \langle U_2, B_j, j \geq i \mid B_{j+1} U_2 B_{j+1}^{-1} = U_2 B_j, j \in \mathbb{N} \rangle \|
\end{tikzcd}$$

voor $U_\varepsilon(P) \subset W' \subset \mathbb{R}^3$.

B_j commuteert niet met U_2, zij nl. $f(B_j) := (123)$ en $f(B_{j+1}) := (132)$ en $f(U_2) := (12)$

dan is $(123)(12)(123)^{-1} = (23)$ en $(12)(132)^{-1} = (23)$

dus $f(B_{2j+2})\, f(k_1)\, f(B_{2j+2})^{-1} = f(k_2)\, f(B_{2j+1})^{-1}$ evenzo is:

$f(B_{2j+1})\, f(k_2)\, f(B_{2j+1})^{-1} = f(k_2)\, f(B_{2j})^{-1}$, dus f definieert een groepsmorfisme van $\pi_1(R^3 \setminus k)$ naar S_3 en wel zo dat $[f(k_2), f(B_i)] \neq 1$

Dus $R^3 \setminus k$ is niet lokaal commutatief in P, dus k is niet lokaal tam in P.

Uit de figuur is te zien dat k buiten P wel lokaal tam is. Dus $W(k) = \{P\}$.

Hkb is k wild.

opm Uit de voorbeelden 6 en 7 volgt dat $K \subsetneq K_2$, want de knopen uit de vb-n 6 en 7 zijn de vereniging van aftelbaar veel rechte lijnstukken, dus zijn element van K_2, maar niet tam, dus geen element van K_1. (zie blz. 4-4)

Lemma (8.2) Zij k een knoop van de 2e klasse, dan is $W(k) := k \setminus T(k)$ aftelbaar.

bew.(8.2) Zij k een knoop van de 2e klasse, dan is na een evt. homeomorfisme $h: R^3 \to R^3$, $k' := h(k)$, k' een knoop die de vereniging van aftelbaar veel (maximale) rechte lijnstukken l_i is. Volgens eigenschap (3.7) is $\mathring{l}_i$ relatief open in k', dus voor alle $P \in \mathring{l}_i$ is er een $\varepsilon > 0$ zdd $U_\varepsilon(P) \cap k' = U_\varepsilon(P) \cap l_i$, dus k' is lokaal tam in P.

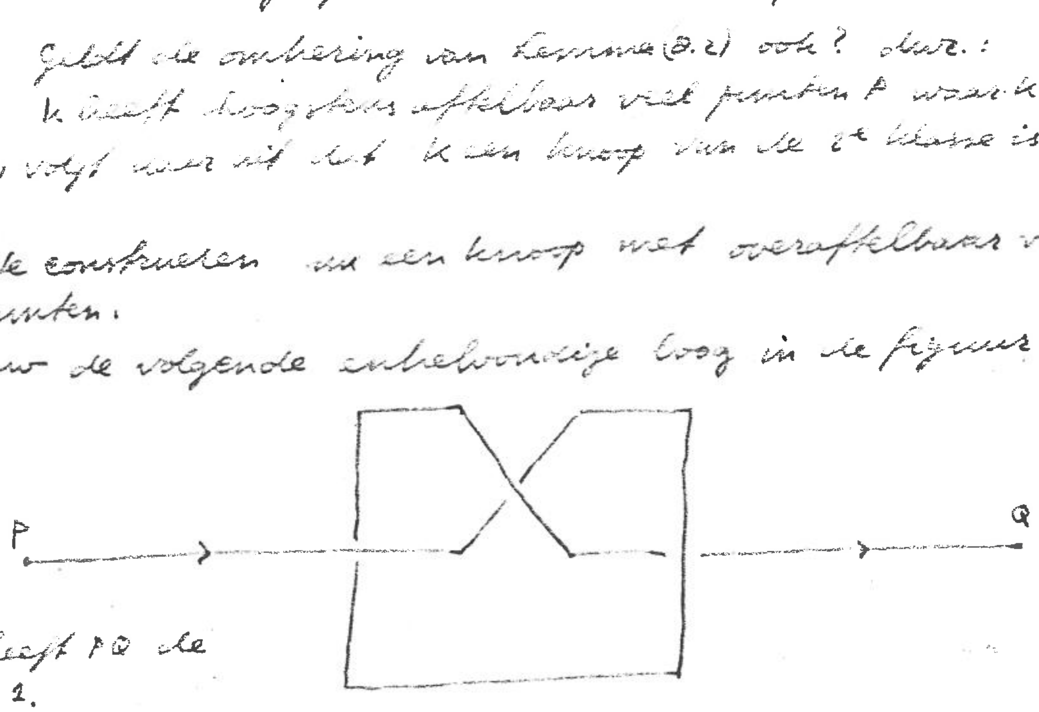
Dus $W(k') = k' \setminus T(k') \subset k' \setminus \cup\{\mathring{l}_i \mid i \in I\}$ = collectie hoekpunten van k = = collectie eindpunten van l_i, $i \in I$. , dit zijn er hoogstens aftelbaar veel, omdat I aftelbaar is. Dus $W(k')$ is aftelbaar, volgens (3.5)^{ii} $h/T(k): T(k) \to T(k')$ een homeomorfisme, dus $h/W(k): W(k) \to W(k')$ is ook een homeomorfisme, dus $W(k)$ is aftelbaar. ⊠

opm. Lemma (8.2) geeft ons een criterium of een knoop van de 2e klasse

Vraag: Geldt de omkering van Lemma (8.2) ook? dwz.: k heeft hoogstens aftelbaar veel punten P waar k niet lokaal tam is, volgt daar uit dat k een knoop van de 2e klasse is?

vb-8 We construeren nu een knoop met overaftelbaar veel wilde punten.

Beschouw de volgende enkelvoudige boog in de figuur:



Hierin heeft PQ de lengte 1.

Zij $\mathcal{C}$ het Cantordiscontinuum in $[0,1]$, dat ontstaat op de volgende manier: $F_0 := [0,1]$,

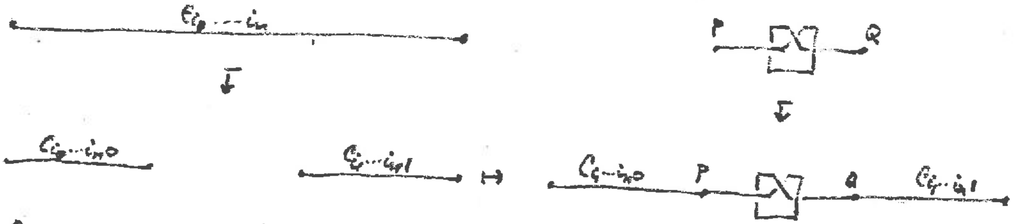
$F_1 := F_0 \setminus (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{3}{3}]$

$F_2 := F_1 \setminus ((\frac{1}{9},\frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9},\frac{8}{9})) = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$

$F_n = \cup\{C_{i_1\cdots i_n} \mid i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}\}$, $C_{i_1\cdots i_n}$ een gesloten recht lijnstuk ter lengte $\frac{1}{3^n}$, zdd $C_{i_1\cdots i_n} \cap C_{j_1\cdots j_n} = \emptyset$ als $\vec{i} \neq \vec{j}$.
Verdeel $C_{i_1\cdots i_n}$ in drie gelijke stukken en laat het middelste open segment weg, we houden dan twee gesloten lijnstukken $C_{i_1\cdots i_n 0}$ (links) en $C_{i_1\cdots i_n 1}$ (rechts) ter lengte $\frac{1}{3^{n+1}}$ over.

$F_{n+1} := \cup\{C_{i_1\cdots i_n i_{n+1}} \mid i_1,\dots,i_n,i_{n+1} \in \{0,1\}\}$

Nu is $\mathcal{C} := \cap\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ het Cantor discontinuum.
We vervangen nu het middelste segment uit $C_{i_1\cdots i_n}$ door de op blz. 8-8 onder getekende boog in, maar dan 3^n maal zo klein, zó dat P in $C_{i_1\cdots i_n 0}$ en Q in $C_{i_1\cdots i_n 1}$ komt:

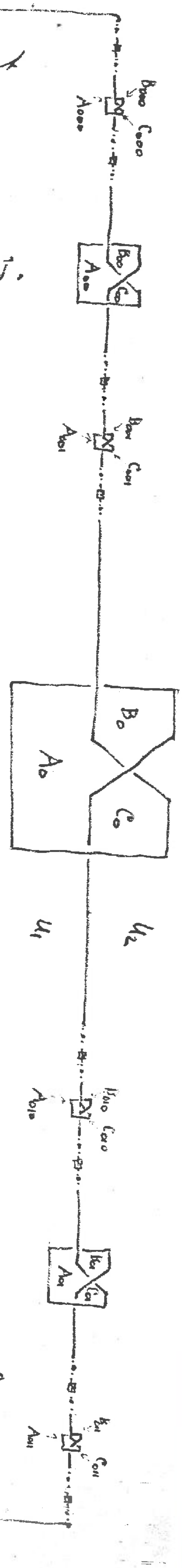


Op deze manier krijgen we een enkelvoudige kromme in $\mathbb{R}^3$ van $(0,0,0)$ naar $(1,0,0)$. Door de rechte lijnstukken:
$\{(0,y,0) \mid -1 \le y \le 0\}$, $\{(x,-1,0) \mid 0 \le x \le 1\}$ en $\{(1,y,0) \mid -1 \le y \le 0\}$
toe te voegen, krijgen we gesloten enkelvoudige kromme in de $\mathbb{R}^3$, dwz een knoop, (zie tekening).

$\{U_1,U_2\} \cup \{A_{0i_1\cdots i_n}, B_{0i_1\cdots i_n}, C_{0i_1\cdots i_n} \mid i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}, n=0,1,2,\dots\}$ is de collectie samenhangscomponenten van $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(K)$.
De projectie $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z)=(x,y)$, is zodanig dat aan de eisen van een knoop van de 1e klasse, voldaan is. De Dehn presentatie is alsvolgt:

$\langle U_1,U_2, A_i, B_i, C_i \mid U_1=1,\ C_i U_1^{-1} = A_i U_2^{-1},\ U_2 U_1^{-1} = A_i B_i^{-1},\ B_i U_1^{-1} = A_i C_i,\ i \in I \rangle$

met $I := \{(0,i_1,\dots,i_n) \mid i_1,\dots,i_n \in \{0,1\}, n=0,1,2,\dots\}$.



Analoog aan vb.6 is deze presentatie equivalent met:

$\langle x, c_i, i\in I \mid x c_i x = c_i x c_i \rangle$

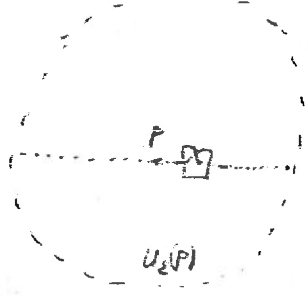
Omdat I een aftelbaar oneindige verzameling is, bestaat er een bijectieve afbeelding: $f: \mathbb{N} \to I$, maar dan definieert φ, met $\varphi(c_i) := c_{f(i)}$ een isomorfisme tussen de groepen:

$\| x, c_i, i\in\mathbb{N} \mid x c_i x = c_i x c_i, i\in\mathbb{N}\|$ en $\|x, c_i, i \in I \mid x c_i x = c_i x c_i, i\in I\|$.

Dus de knopen uit vb.6 en 8 hebben isomorfe groepen.
Toch zijn beide knopen niet equivalent, omdat de laatste knoop geen knoop van de 2e klasse is en de eerste wel.
Want: de knoop is zo geconstrueerd dat $\mathcal{C} \subset K$,
alle punten P buiten $\mathcal{C}$ en in K op het inwendige van een rechtlijnstuk L liggen of $P \in \mathring{L}$ of hoekpunt is van twee rechte lijnstukken L_1 en L_2, $\{P\} = L_1 \cap L_2$. In beide gevallen is K lokaal tam in P. We tonen nu aan dat K niet lokaal tam is in P, als $P\in\mathcal{C}$.
Stel eens dat K lokaal tam in P is en $P \in \mathcal{C}$, dan is $(\mathbb{R}^3\setminus K)$ lokaal commutatief in P, neem $W := \mathbb{R}^3$, dan moet er een open omgeving W' van P in $\mathbb{R}^3$ zijn, zodat $P \in W' \subset W$ en $\pi_1(W'\cap(\mathbb{R}^3\setminus K), P_0)$ abels is $\forall P_0 \in W'\cap(\mathbb{R}^3\setminus K)$, maar $P\in W'$ is open, dus $\exists \varepsilon>0$ zodat $U_\varepsilon(P) \subset W'$, $P \in \mathcal{C} = \bigcap\{F_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, dus er is een $n\in\mathbb{N}$ met $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, $P \in F_{n+1}$, dus er is een $C_{i_1\dots i_n i_{n+1}}$, met $P \in C_{i_1\dots i_n i_{n+1}} \subset C_{i_1\dots i_n}$,
$\forall Q \in C_{i_1\dots i_n}$ geldt $|P-Q| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$, dus $Q \in U_\varepsilon(P)$, dus $C_{i_1\dots i_n} \subset U_\varepsilon(P)$ en de enkelvoudige boog, die het middelste open segment van $C_{i_1\dots i_n}$ vervangt, ligt ook in $U_\varepsilon(P)$, maar dan is het volgende diagram commutatief:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(W'\setminus K) \arrow[dr] & \\ \pi_1(U_\varepsilon(P)\setminus K) \arrow[ur] \arrow[rr, hook] & & \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K) \end{tikzcd}$$

$\pi_1(U_\varepsilon(P)\setminus K)$ is niet abels,
dus $\pi_1(W'\setminus K)$ ook niet, tegenspraak.
Dus K is niet lokaal tam in P, als $P\in\mathcal{C}$.



Gevolg: $\mathcal{W}(K) = K \setminus \mathcal{T}(K) = \mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ is het Cantor discontinuum, dus overaftelbaar, volgens lemma(8.2) is K dan geen knoop van de 2e klasse.
K is een knoop van de 3e klasse,
Dus: $\mathcal{K}_2 \subsetneq \mathcal{K}_3$. (zie blz. 4-4)

Tenslotte geven we een knoop die "overal wild" is.

Lemma (8.3) Zij k een knoop van de 3^e klasse, dan is $\tau(k) \neq \emptyset$

bew. (8.3) Zij k een knoop van de 3^e klasse, dan mogen we met lemma (3.5) veronderstellen, dat na een eventueel homeomorfisme, $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$, aan de volgende eisen voldoet:

(i) $\pi^{-1}(x) \cap k$ heeft hoogstens 2 punten

(ii) voor alle $x \in \mathbb{R}^2$ met $\pi^{-1}(x) \cap k$ bestaat uit 2 punten, is er een $\delta > 0$ en zijn er lijnen l_1 en l_2 in $\mathbb{R}^3$ zodat $\pi(l_1) \cap \pi(l_2) = \{x\}$ en $\pi^{-1}(U_\delta(x)) \cap k = \pi^{-1}(U_\delta(x)) \cap (l_1 \cup l_2)$ en $\delta \leq d(l_1, l_2)$

(zie lemma. 6.2).

Als er helemaal geen punten $x \in \mathbb{R}^2$ zijn met: $|\pi^{-1}(x) \cap k| = 2$, dan is $\pi|k$ injectief, dus de projectie van k heeft geen dubbelpunten. volgens Gevolg (1.2) is k dan triviaal, dus i.h.b. tam, dus $\tau(k) = k \neq \emptyset$.

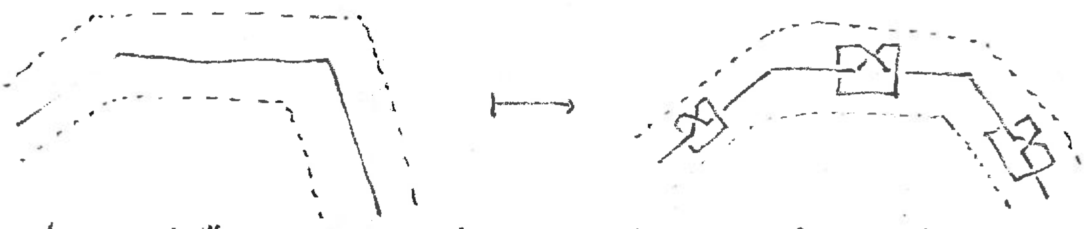
Als er wel een $x \in \mathbb{R}^2$ is met $|\pi^{-1}(x) \cap k| = 2$, $\pi^{-1}(x) \cap k = \{P_1, P_2\}$, $P_1 \neq P_2$ $P_i \in l_j$, dan is $U_\delta(P_1) \cap k = U_\delta(P_1) \cap l_1$, dus k is lokaal tam in P_1. Dus $P_1 \in \tau(k)$, dus $\tau(k) \neq \emptyset$. ☒

vb.9 Zij k_0 een triviale polygoon knoop (bijvoorbeeld een vierkant). Laat k_n een polygoon knoop zijn, $n \in \mathbb{N}$, dan is er een tubulaire omgeving T_n van k_n en er is een $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$, zodat $B_n := \overline{U}_{\varepsilon_n}(k_n) \subset T_n$.

Verdeel nu de lijnstukken van het polygoon k_n in deellijnstukken, die alle een lengte kleiner ε_n hebben, vervang nu al die deel-lijnstukken door een polygoon boog "met een klaverblad knoop erin", zoals de boog op blz. 8-8 onder, dan ontstaat er een nieuwe knoop k_{n+1}, $k_{n+1} \subset U_{\varepsilon_n}(k_n) \subset T_n$.

Met volledige inductie krijgen we een rij knopen k_n en gesloten omgevingen B_n en tubulaire omgevingen T_n van k_n, zodat $k_{n+1} \subset B_n$.

Zij k de knoop: $k := \cap\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



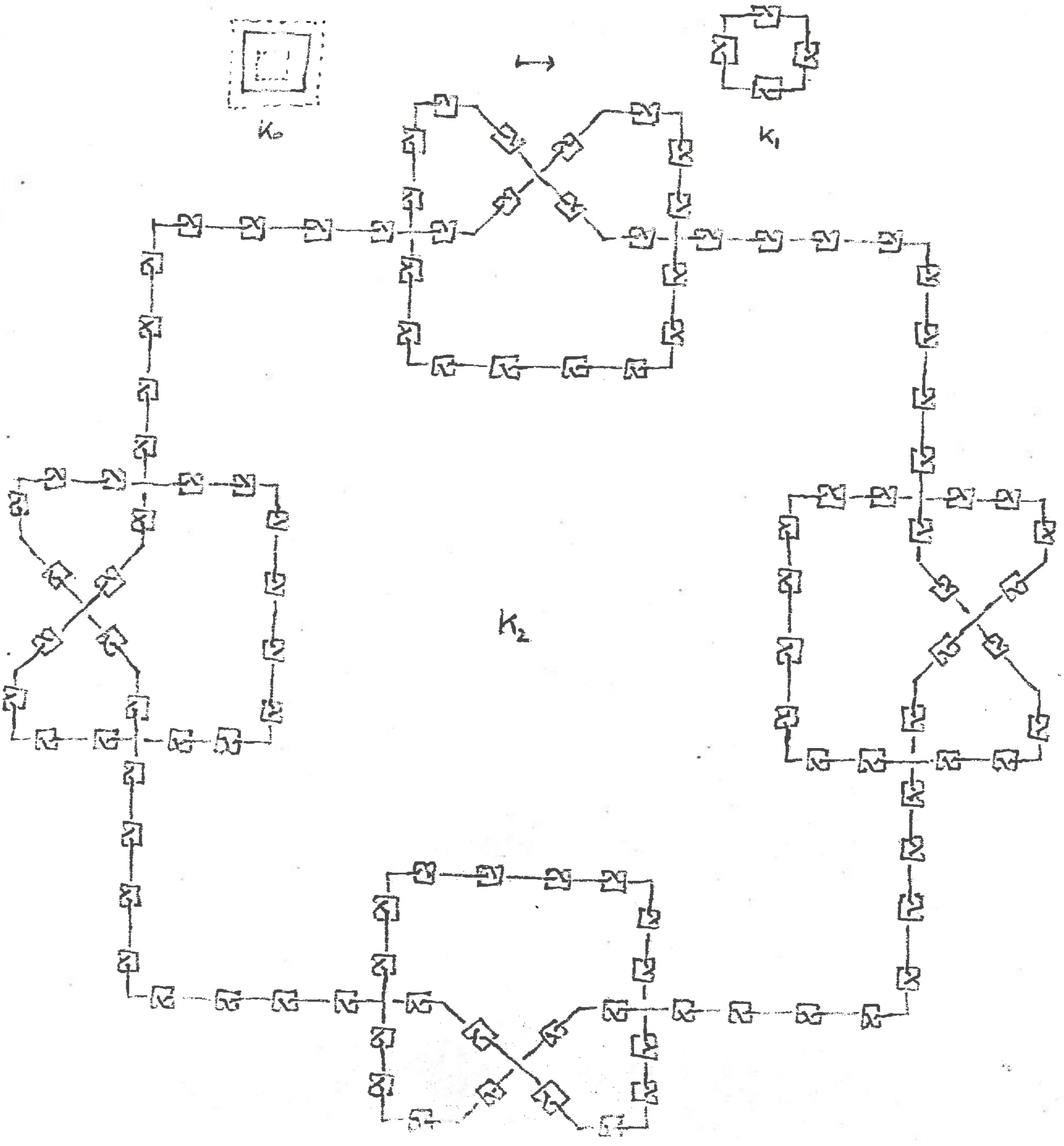
Deze knoop is "overal wild", dus $\mathcal{W}(k) = k$, ofwel $\tau(k) = \emptyset$.

Zij nl. $P \in k$ en $P \in W$ open in $\mathbb{R}^3$, dan is er een $\varepsilon > 0$ met $U_\varepsilon(P) \subset W$

Er is een $n \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, $P \in K = \bigcap\{B_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, dus $P \in B_n$, dus $P \in \overline{U}_{\varepsilon_n}(K_n)$, dus er is een $Q \in K_n$, met $d(P,Q) \leq \varepsilon_n < \frac{1}{n}$.
Q ligt op een lijnstuk L van K_n, ter lengte kleiner dan ε_n, dus $\forall Q' \in L$: $d(Q,Q') \leq \varepsilon_n$, dus $d(P,Q') \leq d(P,Q) + d(Q,Q') \leq 2\varepsilon_n < \frac{2}{n} < \varepsilon$, dus $L \subset U_\varepsilon(P)$. L wordt vervangen door een lijnstuk met een klaverblad knoop erin. Nu is B_{n+1} een tubulaire omgeving van K_{n+1} dus:

$$\pi_1(U_\varepsilon(P) \setminus K_{n+1}) \cong \pi_1(U_\varepsilon(P) \setminus B_{n+1}) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \quad \text{en} \quad \pi_1(U_\varepsilon(P) \setminus K_{n+1})$$

is niet commutatief, omdat de klaverblad knoop in L, in $U_\varepsilon(P)$ ligt.
Dus $(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ is niet lokaal commutatief in P, dus K is niet lokaal tam in P, dus $\tau(K) = \emptyset$.
Volgens lemma (8.3) is K dan geen knoop van de 3e klasse,
Dus: $\mathcal{K}_3 \subsetneq \mathcal{K}$ (zie: blz. 4-4)



§9 Vrije calculus, Alexander matrix, Alexander polynoom

In deze paragraaf geven we een kort overzicht van de theorie der vrije calculus, de Alexander matrix behorend bij een presentatie van een groep en het Alexander polynoom van een knoop, zoals uiteengezet in het boek van R.H. Crowell en R.H. Fox: "Introduction to knot theory," ch VII, ch VIII, GTM 57, Springer.

We beschouwen in deze paragraaf enkel presentaties met eindig veel voortbrengers en eindig veel relatoren.

Twee presentaties $\langle x_1, \dots, x_m / r_1, \dots \rangle$ en $\langle y_1, \dots, y_n \mid s_1, \dots \rangle$ heten <u>equivalent</u> als de voorgestelde groepen isomorf zijn.

Als we aan de relatoren $r_1, \dots, r_p$ van de presentatie $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle$ een relator s toevoegen, en s het gevolg van $r_1, \dots, r_p$ is, dwz s zit in de normaaldeler voortgebracht door $r_1, \dots, r_p$: $s = \prod_{k=1}^{n} g_k r_{i_k}^{\epsilon_k} g_k^{-1}$, of de omgekeerde bewerking, dan noemen we dat een <u>Tietze transformatie van de 1^e soort</u>:

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle \mapsto \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p, s \rangle$$

Als we aan de voortbrengers een nieuwe voortbrenger y toevoegen en aan de relatoren een relator $y\xi^{-1}$ "die y definieert in termen van $x_1, \dots, x_m$", dwz $\xi \in F(x_1, \dots, x_m)$:= de vrije groep voortgebracht door $x_1, \dots, x_m$; of de omgekeerde bewerking, dan noemen we dat een Tietze transformatie van de <u>2^e soort</u>.

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle \mapsto \langle x_1, \dots, x_m, y \mid r_1, \dots, r_p, y\xi^{-1} \rangle$$

Er geldt nu: <u>Stelling van Tietze</u> : twee presentaties $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle$ en $\langle y_1, \dots, y_n \mid s_1, \dots, s_q \rangle$ zijn equivalent desda ze uit elkaar zijn te verkrijgen door een eindig aantal Tietze transformaties (van de 1^e of 2^e soort) (zie Crowell en Fox, ch IV (3.2)).

Vrije calculus:

Zij G een groep en Λ een commutatieve ring met eenheidselement 1.

$$\Lambda[G] := \{ \gamma \mid \gamma : G \to \Lambda \ , \gamma(g) \neq 0 \text{ voor hoogstens eindig veel } g \in G \}.$$

$$(\gamma_1+\gamma_2)(g) := \gamma_1(g) + \gamma_2(g)$$

$$(\gamma_1\cdot\gamma_2)(g) := \sum_{g_1 g_2 = g} \gamma_1(g_1)\,\gamma_2(g_2)$$

$$(\lambda\cdot\gamma)(g) := \lambda\cdot\gamma(g) \qquad \text{en} \qquad (\gamma\cdot\lambda)(g) := \gamma(g)\cdot\lambda$$

Als γ, γ_1 en $\gamma_2 \in \Lambda[G]$ en $\lambda \in \Lambda$ dan zijn $(\gamma_1+\gamma_2), (\gamma_1\cdot\gamma_2), (\lambda\cdot\gamma)$ en $(\gamma\cdot\lambda) \in \Lambda[G]$
Met deze definitie is $\Lambda[G]$ een Λ-algebra geworden.
Als $\Lambda = \mathbb{Z}$, dan wordt $\mathbb{Z}[G]$ de groepen ring van G genoemd.

$$G \to \Lambda[G]$$
$$g \mapsto \bar{g} \qquad , \quad \bar{g}(h) := \begin{cases} 0 & \text{als } h \neq g \\ 1 & \text{als } h = g \end{cases}$$

Op deze manier is elke $\gamma \in \Lambda[G]$ op eenduidige wijze te schrijven als: $\gamma = \lambda_1\bar{g}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{g}_n$, met $g_1, \ldots, g_n \in G$ onderling verschillend en $\lambda_i = \gamma(g_i)$.
Als e het neutrale element in G is, dan is $\bar{e}$ het eenheidselement van $\Lambda[G]$.

Voortaan laten we het streepje boven g weg: dus g ipv $\bar{g}$ als we het over g in $\Lambda[G]$ hebben.
$\Lambda[G]$ is commutatief als ring $\Leftrightarrow$ G is commutatief als groep.

Als A een Λ-moduul is, dan hoort er bij iedere afbeelding $\varphi : G \to A$, precies één Λ-lineair morfisme $\Phi : \Lambda[G] \to A$, met $\Phi(g) = \varphi(g)$ $\forall g \in G$, nl $\Phi(\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi(g_i)$, als bovendien $\varphi(g_1\cdot g_2) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$ voor $\forall g_1, g_2 \in G$, en A een Λ-algebra is, dan is Φ een Λ-algebra morfisme.
$\varepsilon : \Lambda[G] \to \Lambda$, met $\varepsilon(\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n) := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, is een ring morfism
$i : \Lambda \to \Lambda[G]$, met $i(\lambda) := \lambda\cdot e$, is een ring morfisme, wenzo $\lambda \mapsto e\cdot\lambda$

Een afbeelding $D : \Lambda[G] \to \Lambda[G]$ heet een derivatie, als:
(i) D een Λ-lineair morfisme is.
(ii) $D(\gamma_1\cdot\gamma_2) = D(\gamma_1)\cdot\varepsilon(\gamma_2) + \gamma_1\cdot D(\gamma_2)$

Als D_1 en D_2 twee derivaties zijn op $\Lambda[G]$, dan is D_1+D_2, met $(D_1+D_2)(\gamma) := D_1(\gamma) + D_2(\gamma)$, weer een derivatie op $\Lambda[G]$,

als D een derivatie op $\Lambda[G]$ is en $\gamma_0 \in \Lambda[G]$, dan is $D\cdot\gamma_0$, met $(D\cdot\gamma_0)(\gamma) := D(\gamma)\cdot\gamma_0$, ook een derivatie op $\Lambda[G]$.

$\mathcal{D} := \{ D \mid D : \Lambda[G] \to \Lambda[G]$ is een derivatie $\}$

$D \in \mathcal{D}$ dan is:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D(g_i)$$

$$D(\lambda) = 0 \quad \text{voor } \lambda \in \Lambda$$

$$D(g^{-1}) = -g^{-1} D(g)$$

$$D(g^n) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{als } n=0 & \\ (e+g+\dots+g^{n-1})\, D(g) & \text{als } n>0 & , n \in \mathbb{Z} \\ -(g^{-1}+g^{-2}+\dots+g^{n})\, D(g) & \text{als } n<0 & , n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{ dus: } D(g^n) = \left(\frac{g^n-1}{g-1}\right) D(g)$$

Dus D wordt geheel bepaald door z'n gedrag op E, als E een voortbrengende verzameling voor de groep G is.

Als $F(x_1, \dots, x_m)$ de vrije groep met voortbrengers $x_1, \dots, x_m$ is, dan is er voor iedere i precies één derivatie $D \in \mathcal{D}$ zodat $D(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$

deze derivatie geven we aan met $\frac{\partial}{\partial x_i}$

$F := F(x_1, \dots, x_m)$, voor elk stelsel $\{h_i \mid 1 \le i \le m\}$, $h_i \in \Lambda[F]$ is er precies één derivatie D op $\Lambda[F]$ met $D(x_i) = h_i$, nl

$$D := \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot h_i \quad \text{of:} \quad D(\gamma) := \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right) h_i$$

Alexander matrix.

Zij $F := F(x_1, \dots, x_m)$ en N de ondergroep van F die als normaaldeler wordt voortgebracht door $r_1, \dots, r_p \in F$ en G de groep F/N, dan geven we met $\| x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \|$ de groep $F/N = G$ aan.

$\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle$ heet een presentatie van G.

$1 \to N \to F \xrightarrow{q} G \to 1$ is een exakte rij van groepen, q definieert een Λ-lineair ringhomomorfisme van $\Lambda[F]$ naar $\Lambda[G]$, dat we weer met q aangeven.

$1 \to [G,G] \to G \xrightarrow{a} G^{ab} := G/[G,G] \to 0$, $[G,G]$ de commutatorondergroep van G, dan is $G/[G,G]$ abels, a definieert een Λ-lineair ring homomorfisme, van $\Lambda[G] \to \Lambda[G^{ab}]$, die we ook met a zullen

Nemen we in het vervolg voor Λ de ring $\mathbb{Z}$, dan hebben we:

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{a} \mathbb{Z}[G^{ab}]$$

De Alexander-matrix van G behorend bij de presentatie $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle$ van G is de matrix met matrixelementen A_{ij}, $1 \le i \le p$ en $1 \le j \le m$, in $\mathbb{Z}[G^{ab}]$ en

$$A_{ij} := a\varphi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$$

<u>Elementaire idealen</u>

Zij R een commutatieve ring met eenheidselement 1 en zij A een $(p \times m)$ matrix met elementen in R.

Dan wordt het <u>l^e elementaire ideaal van A</u> : $E_l(A)$ alsvolgt gedefinieerd:

$$E_l(A) := \begin{cases} \text{het ideaal in } R\text{, voortgebracht door de } (m-l)\times(m-l) \\ \text{onderdeterminanten van } A\text{, als } 0 < m-l \le p \\ (0) \text{ als } m-l > p \\ R \text{ als } m-l \le 0 \end{cases}$$

Nu is $E_0(A) \subset E_1(A) \subset \dots \subset E_n(A) = E_{n+1}(A) = \dots = R$, want een $(n-l)\times(n-l)$ onderdeterminant is de som van $(n-l-1)\times(n-l-1)$ onderdeterminanten, en deze zijn elementen van $E_n(A)$.

<u>opm.</u> De elementaire idealen worden soms ook wel de <u>Fitting idealen</u> genoemd.

Twee matrices heten <u>equivalent</u>, als ze uit elkaar verkregen kunnen worden door een eindige rij van de volgende operaties (of de inverse ervan).

(i) het verwisselen van 2 rijen in de matrix (dus elke permutatie van rijen)

(ii) het verwisselen van 2 kolommen in de matrix (dus elke permutatie van kolommen)

(iii) het toevoegen van een rij nullen: $A \mapsto \begin{pmatrix} A \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$

(iv) het toevoegen van een $(p+1)^e$ rij en een $(m+1)^e$ kolom (als A een $(p\times m)$ matrix is), zodat op de $(p+1, m+1)^e$ plaats een 1 en op alle andere nieuwe plaatsen een 0 staat: $A \mapsto \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$

(v) het optellen bij een gegeven rij van een lineaire combinatie van andere rijen.

(vi) het optellen bij een gegeven kolom van een lineaire combinatie van andere kolommen.

We schrijven $A \sim B$ als A en B twee equivalente matrices zijn.
Er geldt nu: A en B twee equivalente matrices $\Rightarrow E_k(A) = E_k(B)$ $\forall k$

R en R' twee commutatieve ringen met eenheidselement en $\varphi: R \to R'$ een surjectief ringmorfisme, dan is $\varphi(E_k(A)) = E_k(\varphi(A))$, als A een matrix met elementen in R en $(\varphi(A))_{ij} := \varphi(A_{ij})$. $\varphi(A)$ is dan een matrix met elementen in R'.

Zij $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle \mapsto \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p, s \rangle$ een Tietze transformatie van de 1ste soort en A matrix behorend bij de eerste presentatie en B de matrix behorend bij de tweede, dan zijn A en B equivalent.

Evenzo zijn A en B equivalent als

$\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle \mapsto \langle x_1, \dots, x_m, y \mid r_1, \dots, r_p, y\xi^{-1} \rangle$ een Tietze-transformatie van de 2e soort is en A de Alexander matrix behorend bij de eerste en B die behorend bij de tweede presentatie is.

Mbv van de Stelling van Tietze (blz. 4-1) volgt dan:

Als $\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_p \rangle$ en $\langle y_1, \dots, y_n \mid s_1, \dots, s_q \rangle$ twee presentaties van eenzelfde groep G zijn en A en B de Alexandermatrices van resp. de 1ste en 2e presentatie zijn, dan zijn A en B equivalent en dus $E_k(A) = E_k(B)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dus we kunnen over het k^e elementaire ideaal van G spreken, als G een groep met een eindige presentatie is.

<u>Alexander polynoom</u>

Als G een groep is met $G^{ab} \cong \mathbb{Z} \cong \{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, dan is
$\mathbb{Z}[G^{ab}] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$

De ring $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ is een ontbindingsring en de eenheden zijn: $\{\pm t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Voor de groep G van een knoop K geldt idd $G^{ab} = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)^{ab} \cong H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. In het geval van een tamme knoop kunnen we dat ook afleiden uit de Wirtinger presentatie:

Want de groep G, $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k)$, k een tamme knoop, heeft een presentatie van de vorm (zie §7):

$$< x_t \,,\, 1 \leq t \leq n \;|\; x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t} \,,\, 1 \leq t < n >$$

dus G^{ab} heeft een presentatie:

$$< x_t \,,\, 1 \leq t \leq n \;|\; x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t} \,,\, 1 \leq t < n \,,\; [x_i, x_j] = 1 \quad 1 \leq i, j \leq n >$$

Zij $f(x_t) := 1 \in \mathbb{Z}$, dan definieert f een groepsmorfisme van G^{ab} naar $\mathbb{Z}$, zij $g(n) := x_1^n$ voor $n \in \mathbb{Z}$, dan is g een homomorfisme van $\mathbb{Z}$ naar G^{ab}.
f en g zijn elkaars inverse, want:

$fg(n) = f(x_1^n) = n \cdot 1 = n$, dus $f \cdot g = id$.

en $x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_{j_t}^{-\varepsilon_t} x_t$ voor $1 \leq t < n$, want $[x_t, x_{j_t}] = 1$,

dus $x_t = x_1 \;\forall\, t$, $1 \leq t \leq n$, dus $gf(x_t) = g(1) = x_1 = x_t$, dus $g \cdot f = id$

Zij nu G de groep van een tamme knoop k, en A de Alexandermatrix van een eindige presentatie van G, dan is $E_i(A)$ onafhankelijk van de keuze van de presentatie (blz. 7-5)

We geven $E_i(A)$ daarom aan met $E_i(G)$ of $E_i(k)$.

$E_i(k)$ is een ideaal in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, $G^{ab} \cong \{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathrm{GGD}(I) := \cap \{ (d) \mid d \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \text{ en } I \subset (d) \}$ is een hoofdideaal, als I een ideaal in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ is, want $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ is een ontbindingsring, dus er is een

$\Delta_i \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, met $(\Delta_i) = \mathrm{GGD}(E_i(k))$

Δ_i is op een eenheid $\pm t^n$, $n \in \mathbb{Z}$, na bepaald. Als $\Delta_i \neq 0$ dan kunnen we Δ_i dus zo normeren dat $\Delta_i(0)$ een positief geheel getal is.
Δ_i heet het i^e <u>Alexanderpolynoom</u> van de knoop k.

Voor een tamme knoop k is $E_0(k) = (0)$ en $E_1(k)$ is een hoofdideaal, daartoe bewijzen we eerst een lemma:

Lemma (9.1) Zij G een groep met presentatie:

$$\langle x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_n \mid r_1,\dots,r_p, s_1,\dots,s_q\rangle$$

r een woord in $x_1,\dots,x_m$: $r\in F(x_1,\dots,x_m)$ en

$X = aq(x_i)$ voor $i=1,\dots,m$, met:

$$F(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) \xrightarrow{q} G \xrightarrow{a} G^{ab} \quad \text{en} \quad aq(r)=1$$

dan is: $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} aq\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) = 0$ in $\mathbb{Z}[G^{ab}]$.

bew (9.1) $r\in F(x_1,\dots,x_m)$ dus $r = \prod_{t=1}^{k} x_{i_t}^{d_t}$, $d_t\in\mathbb{Z}$.

$$aq\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) = aq\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\prod_{t=1}^{m} x_{i_t}^{d_t}\right)\right) = \sum_{t=1}^{m} aq\left(\prod_{l=1}^{t-1} x_{i_l}^{d_l}\right) aq\left(\frac{x_{i_t}^{d_t}-1}{x_{i_t}-1}\right) aq\left(\frac{\partial x_{i_t}}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{m} X^{d_1}\cdots X^{d_{t-1}} \left(\frac{X^{d_t}-1}{X-1}\right) \delta_{i_t j} \quad , \text{dus} \quad \sum_{t=1}^{m} aq\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) = \sum_{t=1}^{m} X^{d_1+\dots+d_{t-1}}\left(\frac{X^{d_t}-1}{X-1}\right)$$

$$\sum_{t=1}^{m} aq\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{(X-1)}\left\{(X^{d_1}-1) + X^{d_1}(X^{d_2}-1)+\dots + X^{d_1+\dots+d_{k-1}}(X^{d_k}-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{(X-1)}\left\{-1 + X^{d_1+\dots+d_k}\right\} = 0 \quad , \text{want } 1 = aq(r) = X^{d_1+\dots+d_k}$$

Dus $\displaystyle\sum_{t=1}^{m} aq\left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) = 0$ ☒

Zij $\langle x_1,\dots,x_n \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1\le t<n\rangle$ een Wirtinger presentatie van een tamme knoop K. , nu is $aq(x_i)=t$ in $\mathbb{Z}[G^{ab}] = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ en de i^e relator r_i is van de vorm: $x_{i+1} x_{j_i}^{\varepsilon_i} x_i^{-1} X$

dus volgens Lemma 9.1 is $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} aq\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = 0$ $\forall i$, $1\le i<n$,

Als A de Alexandermatrix van bovenstaande presentatie is en we de eerste $(n-1)$ kolommen van A bij de laatste optellen, dan krijgen we een equivalente matrix B, die in de laatste kolom overal nullen heeft, B is een $(n-1)\times n$ matrix, dus elke $(n-1)\times(n-1)$ deelmatrix, die de laatste kolom bevat heeft determinant 0, dus $E_1(A)=E_1(B)=(\det(A'))$, waarin A' de $(n-1)\times(n-1)$ deelmatrix van A (of B) is die ontstaat door de laatste kolom weg te laten.

$$A = \begin{pmatrix} A' & \begin{matrix}A_{1n}\\ \vdots \\ A_{n-1\,n}\end{matrix}\end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} A' & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

dus $E_1(K) = E_1(A) = (\det(A'))$ is een hoofdideaal, en $E_0(K)=E_0(A)=(0)$ want $n-0>n-1$

opm. Van het ℓ^e Alexanderpolynoom $\Delta_\ell(t)$ van een tamme knoop kan nog aangetoond worden:

$$\Delta_\ell(1) = \pm 1 \quad \text{en} \quad t^d \Delta_\ell(t^{-1}) = \Delta_\ell(t) \text{ , waarin } d := \text{graad } \Delta_\ell(t)$$

zie Crowell en Fox: ch IX

opm. Het eerste Alexander polynoom heeft ook een meetkundige betekenis:

Zij $X := \mathbb{R}^3 \setminus k$, k een tamme knoop in $\mathbb{R}^3$, $G := \pi_1(X)$, de groep van de knoop, $[G,G]$ is een normaaldeler in G, hierbij hoort een reguliere overdekking $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$, met $\pi_1(\tilde{X}) = [G,G]$ en $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X) \cong G/[G,G] = G^{ab} \cong \{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $H_1(\tilde{X})$ is een $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-moduul en er geldt: $H_1(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}[t,t^{-1}]/(\Delta_1(t))$, isomorf als $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-moduul, hierin is $\Delta_1(t)$ het eerste Alexanderpolynoom van k.

zie: Rolfsen, D: "Knots and Links," ch 7: Infinite cyclic covering and the Alexander invariant, Publish or Perish Inc. 1976.

opm. Voor een wilde knoop k heeft de groep G van de knoop een aftelbare presentatie, voor zo'n presentatie is ook de Alexander matrix A te definiëren, deze matrix definieert een $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-moduul $\mathfrak{A}$, die een invariant is van de knoop k.

zie: Brody, E.J.: "On infinitely generated modules", Quart. J. Oxford, 11 (1960), 141-150.

We zullen nu de Alexanderpolynomen van enkele tamme knopen berekenen:

vb.1 De groep van de triviale knoop heeft presentatie $\langle x_1, x_2 \mid x_1$ de bijbehorende Alexander matrix is $(1\ 0)$, dus

$\Delta_k = 1 \quad \forall k \geq 1$,

vb.2 Een presentatie van de groep van de klaverblad knoop k_3 is: $\langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \rangle$, (zie blz. 8-1), de bijbehorende matrix elementen zijn:

$$A_{11} = \alpha\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}\right) = \alpha\varphi\left(1 + x_1 x_2 - x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}\right) = 1 + t^2 - t$$

$$A_{12} = \alpha\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_2} x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}\right) = \alpha\varphi\left(x_1 - x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} - x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}\right) = t - t^2 - 1$$

Dus $A = (1-t+t^2 \quad -1+t-t^2) \sim (1-t+t^2 \quad 0)$

dus $\Delta_1 = 1-t+t^2$ en $\Delta_k = 1 \;\; \forall k \geq 2$.

dus $\Delta_1 \neq 1$, dus k_3 is niet triviaal.

<u>vb. 3</u> Zij G de groep van de knoop k_4 (zie blz. 8-2), deze heeft als presentatie: $\langle x_1, x_2 \mid x_1 [x_2^{-1}, x_1] = [x_2^{-1}, x_1] x_2 \rangle$

dus $A_{11} = \alpha\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 [x_2^{-1}, x_1] - [x_2^{-1}, x_1] x_2\right)\right) = 1 + t(t^{-1}-1) - (t^{-1}-1) = -t^{-1}+3-t$

Evenzo is $A_{12} = t^{-1} - 3 + t$

Dus $A = (-t^{-1}+3-t \quad t^{-1}-3+t) \sim (0 \quad t^{-1}-3+t)$

dus $E_1(k_4) = (t^{-1}-3+t) = (1-3t+t^2)$, dus $\Delta_1 = 1-3t+t^2$,

$E_l(k_4) = (1)$, dus $\Delta_l = 1 \;\; \forall l \geq 2$.

Dus k_4 is niet equivalent met k_3 en is niet triviaal, want $1 \neq 1-3t+t^2 \neq 1-t+t^2$.

<u>vb. 4</u> Zij G de groep van de knoop k_7 (zie blz. 8-3), deze heeft de volgende presentatie:

$\langle x, y, z \mid y[x^{-1}, y]x = x[z^{-1}, x]z \; , \; x[z^{-1}, x] = y[z^{-1}, y] \rangle$

Zij r de relator: $y[x^{-1}, y]x \cdot (x[z^{-1}, x]z)^{-1}$

en s de relator: $x[z^{-1}, x] \cdot (y[z^{-1}, y])^{-1}$.

Dan is: $\alpha\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \alpha\varphi\left(y \frac{\partial}{\partial x}[x^{-1}, y] + y[x^{-1}, y] - 1 - x\frac{\partial}{\partial x}[z^{-1}, x]\right)$

$= t(1-t)(-t^{-1}) + t - 1 - t(t^{-1}-1) = -3+3t$

$\alpha\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \alpha\varphi\left(1 + y\frac{\partial}{\partial y}[x^{-1}, y]\right) = 1 + t(t^{-1}-1) = 2-t$

$\alpha\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \alpha\varphi\left(-x\frac{\partial}{\partial z}[z^{-1}, x] - x[z^{-1}, x]\right) = -t(1-t)(-t^{-1}) - t = 1-2t$

$\alpha\varphi\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \alpha\varphi\left(1 + x\frac{\partial}{\partial x}[z^{-1}, x]\right) = 1 + t(t^{-1}-1) = 2-t$

$\alpha\varphi\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \alpha\varphi\left(-1 - y\frac{\partial}{\partial y}[z^{-1}, y]\right) = -1 - t(t^{-1}-1) = -2+t$

$\alpha\varphi\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = \alpha\varphi\left(x\frac{\partial}{\partial z}[z^{-1}, x] - y\frac{\partial}{\partial z}[z^{-1}, y]\right) = t(1-t)(-t^{-1}) - t(1-t)(-t^{-1}) = 0$

Dus de Alexander matrix van deze presentatie is:

$$A = \begin{pmatrix} -3+3t & 2-t & 1-2t \\ 2-t & -2+t & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2-t & 1-2t \\ 0 & -2+t & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-2t \\ 0 & -2+t & 0 \end{pmatrix}$$

Dus $E_1(A) = ((1-2t)(-2+t)) = (-2+5t-2t^2)$

$E_2(A) = (1-2t, -2+t)$, $GGD(E_2(A)) = GGD(2-t, 1-2t) = (1)$

$E_\ell(A) = (1)$ $\forall \ell \geq 3$.

Dus $\Delta_1 = 2-5t+2t^2$, $\Delta_2 = 1$ en $\Delta_\ell = 1$ $\forall \ell \geq 3$.

$1 \neq 2-5t+2t^2 \neq 1-t+t^2$, $\neq 1-3t+t^2$

Dus K_7 is niet triviaal en heeft een ander type dan K_3 en dan K_4.

Def. $\mu(K) :=$ minimum $\{ m \mid \langle x_1, .., x_m \mid r_1, .., r_p \rangle$ is een presentatie van de groep van $K \}$

Als K tam is dan is $\mu(K)$ welgedefinieerd.

Lemma (9.2) Zij $E_\ell(K)$ het ℓ^e Alexander ideaal van K, een tamme knoop en $E_\ell(K) \neq (1)$, dan is $\mu(K) \geq \ell+1$

bew. (9.1) Stel $m = \mu(K)$, K een tamme knoop, dan is er een presentatie $\langle x_1, .., x_m \mid r_1, .., r_p \rangle$ van de groep G van K

Zij A de bijbehorende Alexander matrix van de presentatie, dan is A een $(p \times m)$ matrix, per definitie is $E_\ell(K) = E_\ell(A) = (1)$ als $m-\ell \leq 0$, dus als $m \leq \ell$, maar $E_\ell(K) \neq (1)$ volgens het gegeven, dus $m-\ell > 0$, dus $m > \ell$, dus $\mu(K) = m \geq \ell+1$. $\boxtimes$

De groepen van de knopen K_3 K_4 en K_7 hebben eindige presentaties met resp. 2, 2 en 3 voortbrengers.

Dus $\mu(K_3) \leq 2$, $\mu(K_4) \leq 2$ en $\mu(K_7) \leq 3$.

Verder is $\Delta_1(K_3) = 1-t+t^2 \neq 1$ dus $E_1(K_3) \neq (1)$ dus $\mu(K_3) \geq 2$

$\Delta_1(K_4) = 1-3t+t^2 \neq 1$ dus $E_1(K_4) \neq (1)$ dus $\mu(K_4) \geq 2$

$E_2(K_7) = (1-2t, 2-t) \neq (1)$, dus $\mu(K_7) \geq 3$

Conclusie: $\mu(K_3) = 2$, $\mu(K_4) = 2$ en $\mu(K_7) = 3$

§10 Algebraïsche knopen

Zij F een polynoom in twee variabelen, met complexe coëfficienten, ongelijk nul en kwadraatvrij, $F \in \mathbb{C}[X,Y]$, dan definieert F een affeelding $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$.
Stel $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$ en $dF(x_0,y_0) \neq (0,0)$, dan heet (x_0,y_0) een regulier punt van F, anders heet (x_0,y_0) een singulier of kritiek punt.

$V := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x,y) = 0\}$.

Stel $(0,0)$ is een singulier punt van F en $F(0,0)=0$, dan is er een $\varepsilon > 0$ zdd $(0,0)$ het enige (geïsoleerde) kritieke punt van F in de gesloten bol B_ε met straal ε en middelpunt $(0,0)$ is.
Het paar $(B_\varepsilon, B_\varepsilon \cap V)$ wordt gekarakteriseerd door het paar $(S^3_\varepsilon, S^3_\varepsilon \cap V)$, waarin $S^3_\varepsilon := \partial B_\varepsilon$. S^3_ε is een drie-sfeer en $S^3_\varepsilon \cap k$ is een link in S^3_ε, die we met k aangeven: $(B_\varepsilon, B_\varepsilon \cap V)$ is homeomorf met het paar $(C_0(S^3_\varepsilon), C_0(k))$, waarin $C_0(A)$ de kegel op A vanuit $(0,0)$ is.
Verder is er een $\varepsilon_0 > 0$ zdd voor elke ε_1 en ε_2, beide positief en niet groter dan ε_0 geldt: het paar $(B_{\varepsilon_1}, B_{\varepsilon_1} \cap V)$ is homeomorf met het paar $(B_{\varepsilon_2}, B_{\varepsilon_2} \cap V)$ en het paar $(S^3_{\varepsilon_1}, k_1)$ met $(S^3_{\varepsilon_2}, k_2)$.
De link behorend bij een geïsoleerd singulier punt is dus onafhankelijk van ε gedefinieerd en de link bepaalt het "topologisch type" van de singulariteit.
Als $(0,0)$ een regulier punt is, dan is de link een triviale knoop.

Zie: Milnor, J.: "Singular Points of Complex Hypersurfaces." Ann. of Math. Stud 61, Princeton Un. Press.

Knopen en links die op deze manier ontstaan heten algebraïsch.

vb. $F(x,y) = x^p - y^q$; $p,q \geq 2$, $d := GGD(p,q)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = p x^{p-1}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -q y^{q-1}$

Dus: $dF(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $(0,0)$ is een geïsoleerde singulariteit van F.

Zij $\varepsilon := \sqrt{2}$, S_ε de 3-sfeer met straal ε en middelpunt $(0,0)$

$S_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 2\}$

$k = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 2$ en $x^p = y^q\}$.

$x = a e^{2\pi i \theta}$, $y = b e^{2\pi i \varphi}$; $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

$a^2 + b^2 = 2$, $b^2 = 2 - a^2$, $a = b = 1$ want: $x^p = y^q$ dus $a^p = |x|^p = |y|^q = b^q$

dus $a^{2p} = b^{2q} = (2-a^2)^q$. Stel $g(z) := (2-z^2)^q - z^{2p}$, dan is $g(1) = 0$ en

$\dot{g}(z) = -2q(2-z^2)^{q-1} \cdot z - 2p z^{2p-1}$, $0 \leq z \leq \sqrt{2} \Rightarrow \dot{g}(z) < 0$, dus $g(z)$ is een monotoon dalende functie op $[0, \sqrt{2}]$ en $g(1) = 0$, dus 1 is het enige nulpunt van g op $[0, \sqrt{2}]$.

$0 \leq a, b \leq \sqrt{2}$ en $g(a) = 0 = g(b)$, dus $a = 1 = b$

Dus: $x = e^{2\pi i \theta}$ en $y = e^{2\pi i \varphi}$, $x^p = y^q \Rightarrow e^{2\pi i p \theta} = e^{2\pi i q \varphi}$

dus $p\theta - q\varphi \in \mathbb{Z}$. , $d = GGD(p,q)$

$g_n : S^1 \to k$, $g_n(e^{2\pi i \theta}) := \left(e^{2\pi i \theta}, e^{2\pi i \left(\frac{p}{q}\theta + \frac{n}{q}\right)}\right)$, $0 \leq n < d$

Dan is g_n een welgedefinieerde continue afbeelding.

g_n is injectief : $g_n(\theta) = g_n(\theta') \Rightarrow e^{2\pi i \theta} = e^{2\pi i \theta'}$ (de eerste coördinaten).

S^1 is compact, dus $g_n : S^1 \to k$ is een inbedding, $k_n := g_n(S^1)$

$k_m \cap k_n = \emptyset$ als $0 \leq m < n < d$, want:

Stel $g_m(\theta) = g_n(\theta')$, dan is $e^{2\pi i \theta} = e^{2\pi i \theta'}$, dus $\theta - \theta' \in \mathbb{Z}$, zeg $\alpha = \theta - \theta'$

en $e^{2\pi i (\frac{p}{q}\theta + \frac{m}{q})} = e^{2\pi i (\frac{p}{q}\theta' + \frac{n}{q})}$, dus $\frac{p}{q}(\theta - \theta') + \frac{m-n}{q} = \beta \in \mathbb{Z}$. , dus

$m - n = q\beta - p\alpha \in (p,q) = (d)$, dus $d \mid m-n$, maar $0 \leq m < n < d$, dus $0 < m-n < d$: tegenspraak.

$k = \cup \{k_n \mid 0 \leq n < d\}$, want:

$(x,y) \in k \Rightarrow x = e^{2\pi i \theta}$ en $y = e^{2\pi i \varphi}$ en $e^{2\pi i p \theta} = e^{2\pi i q \varphi}$, dus.

$q\varphi - p\theta =: n \in \mathbb{Z}$, er is een $t \in \mathbb{Z}$ met $td \leq n < (t+1)d$, dus

$0 \leq n - td < d$, $n' := n - td$, $(p,q) = (d)$ dus $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$: $d = \alpha p - \beta q$

$\varphi' := \varphi + t\beta$, $\theta' := \theta + t\alpha$,

nu is: $q\varphi' - p\theta' = q\varphi + qt\beta - p\theta - pt\alpha = (q\varphi - p\theta) + t(\beta q - \alpha p) = n - td = n'$

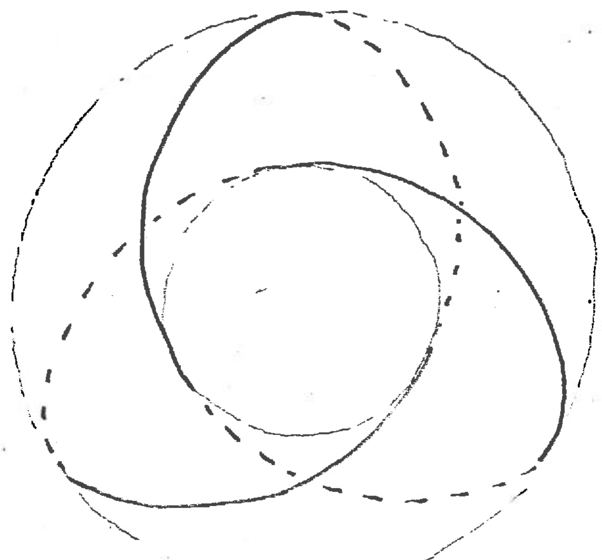
dus $\varphi' = \frac{p}{q}\theta' + \frac{n'}{q}$, dus $(x,y) = (e^{2\pi i\theta}, e^{2\pi i\varphi}) = (e^{2\pi i\theta'}, e^{2\pi i\varphi'}) = g_{n'}(e^{2\pi i\theta'})$,

dus $(x,y) \in K_{n'}$ met $0 \leq n' < d$.

Dus: $K_0, \ldots, K_{d-1}$, zijn d onderling disjuncte knopen en $K = K_0 \cup \ldots \cup K_{d-1}$, dus K is een link met d componenten

Shb is K een knoop desda p en q onderling priem zijn.

Geven we de knoop behorend bij de singulariteit in $(0,0)$ van $x^p = y^q$, met $p,q \geq 2$ en $(p,q) = 1$, aan met $K_{p,q}$, dan noemen we dit een <u>torusknoop</u> van het type (p,q).



$K_{3,2}$

$K_{p,q}$ wordt een torusknoop genoemd, omdat $K_{p,q}$ op de rand van een ongeknoopte volle torus T_1 ligt. , $T_1 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 2$ en $|x| \leq 1\}$

Dat T_1 ongeknoopt in S_ε ligt zien we door S_ε op te vatten als de vereniging van twee volle tori T_1 en T_2 met gemeenschappelijke rand: T.

$T_2 := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 2$ en $|y| \leq 1\} \cong S^1 \times D^2$

$$T := \{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| = 1 \text{ en } |y| = 1 \} \cong S^1 \times S^1$$

$$S^3_\varepsilon = T_1 \cup T_2 \quad \text{en} \quad T_1 \cap T_2 = T = \partial T_1 = \partial T_2$$

$$S^1 \times D^2 \xrightarrow{\sim} T_1 \qquad\qquad S^1 \times D^2 \xrightarrow{\sim} T_2$$

$$(e^{2\pi i\theta}, y) \mapsto (y, \sqrt{2-|y|^2}\, e^{2\pi i\theta}) \qquad (e^{2\pi i\theta}, y) \mapsto (\sqrt{2-|y|^2}\cdot e^{2\pi i\theta}, y)$$

Dus S_ε is de geveselde som van twee volle tori T_1 en T_2, die via hun rand aan elkaar geplakt worden:

$$\partial T_1 \longrightarrow \partial T_2$$
$$(x,y) \mapsto (y,x)$$

$$\begin{tikzcd}
S^1\times S^1 \arrow[r, "{(x,y)\mapsto(y,x)}"] \arrow[d, "{I\ (x,y)}"'] \arrow[dr, "\cong"] & S^1\times D^2 \arrow[dr, "\cong"] & \\
S^1\times D^2 \arrow[dr, "\cong"] & T \arrow[r] \arrow[d] & T_2 \arrow[d] \\
 & T_1 \arrow[r] & S_\varepsilon
\end{tikzcd}$$

Dus de knoop $K_{p,q}$ ligt op de rand van de ongeknoopte volle torus

$h: S^3_\varepsilon \to S^3_\varepsilon$, met $h(x,y) := (y,x)$ is een homeomorfisme,

h voert T_1 over in T_2 en $h(K_{p,q}) = K_{q,p}$

Dus de knopen $K_{p,q}$ en $K_{q,p}$ zijn equivalent.

Zij k een tamme knoop met een open tubulaire omgeving T, $k \subset T$, $h: S^1 \times \mathring{D}^2 \to T$ een homeomorfisme, $h(S^1 \times \{0\}) = k$,

$h': S^1 \times D^2$, $h'(x,y) := h(x, \frac{y}{2})$

De homologieklasse c van de meridiaan $h'(\{1\} \times \partial D^2)$ brengt de eerste homologiegroep van $\mathbb{R}^3 \setminus k$ voort.

We mogen h zo kiezen dat de longitudinaal $h'(S^1 \times \{1\})$ homoloog nul in $\mathbb{R}^3 \setminus k$ is, want: stel $h'(S^1 \times \{1\})$ is homoloog met $m \cdot c$, $m \in \mathbb{Z}$, zij dan $g: S^1 \times \mathring{D}^2 \to T$ gedefinieerd door $g(e^{2\pi i\theta}, re^{2\pi i\varphi}) := h(e^{2\pi i\theta}, re^{2\pi i(\varphi - m\theta)})$, $g'(x,y) := g(x, \frac{y}{2})$, dan is

$g'(S^1 \times \{1\})$ homoloog met $[h'(S^1 \times \{1\})] - mc = mc - mc = 0$.

Dus $g: S^1 \times \mathring{D}^2 \to T$ is een homeomorfisme, zodat de longitudinaal $g'(S^1 \times \{1\})$ homoloog nul is.

$S^1 \times \partial D^2 = S^1 \times S^1$ is een torus, zij $\lambda, n \in \mathbb{N}$, $(\lambda, n) = 1$

$k_{\lambda,n}: S^1 \to S^1\times D^2$, $k_{\lambda,n}(e^{2\pi i\theta}) := (e^{2\pi i n\theta}, e^{2\pi i\lambda\theta})$, dan is $k: S^1 \to \mathbb{R}^3$, met $k := h\circ k_{\lambda,n}$, continu en injectief. S^1 is compact, dus k is een inbedding en $k(S^1)$ is een knoop op de rand van een volle torus om K.
$k(S^1)$ wordt de <u>(λ,n) torusknoop om K</u> genoemd.

<u>opm.</u> We zullen niet laten zien dat de constructie onafhankelijk is van het type van K of van de gekozen tubulaire omgeving T van K en het bij behorende homeomorfisme $h: S^1\times \mathring{D}^2 \to T$.
Als K een triviale knoop is dan krijgen we een gewone torusknoop van het type $K_{\lambda,n}$.
Als K de torusknoop $K_{(\lambda_1,n_1)}$ is dan krijgen we de herhaalde torusknoop: $K(\lambda_1,n_1,\lambda,n)$. In het algemeen krijgen we zo uit $K(\lambda_1,n_1,\dots,\lambda_{g-1},n_{g-1})$ de <u>geïtereerde torusknoop</u>

$K(\lambda_1,n_1,\dots,\lambda_{g-1},n_{g-1},\lambda,n)$

Zij $F\in\mathbb{C}[x,y]$, $F\neq 0$, $F(0,0)=0$, $\mathbb{C}[[x,y]]$ de formele machtreeksring over $\mathbb{C}$ in twee variabelen, F heet <u>analytisch irreducibel</u>, als F opgevat als element van $\mathbb{C}[[x,y]]$ irreducibel is.

<u>vb.</u> $F(x,y) = y^2-(x^2+x^3)$ is irreducibel in $\mathbb{C}[x,y]$, maar analytisch reducibel, want zij $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n := \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}$, dan is $g(x)\in\mathbb{C}[[x]]$ en $g^2 = 1+x$, $f_1 := (y-xg)$, $f_2 = (y+xg)$, dan is f_1 noch f_2 een eenheid en

$$f_1f_2 = (y-xg)(y+xg) = y^2-x^2g^2 = y^2-x^2(1+x) = y^2-(x^2+x^3) = F.$$

<u>Stelling (10.1)</u> Zij $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ een complexe polynoom functie $F(0,0)=0$, $F(0,y)\neq 0$, F analytisch irreducibel en van de graad n in y. Dan is er een $f(x)\in\mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$, $f(x) = \sum_{i=0}^{g} a_i x^{\frac{m_i}{n_1\cdots n_i}} f_i(x^{\frac{1}{n_1\cdots n_i}})$ met $f_i(t)\in\mathbb{C}[[t]]$, voor $0\leq i<g$ en $f_g(t)\in\mathbb{C}[[t]]$, $a_i\neq 0$
$(n_i,m_i)=1$, $n_i\geq 2$, $m_1>n_1$, $m_i > m_{i-1}n_i$, $n = n_1\cdots n_g$, $f(x) = \sum_{k\geq 0}\alpha_k x^{\frac{k}{n}}$
Bld. : $F(x,y) = u\cdot\prod_{\xi\in\mu_n}\left(y-\sum_{k\geq 0}\alpha_k\xi^k x^{\frac{k}{n}}\right)$, μ_n de verz. der k^e machts eenheidswortels

__opm.__ de paren (m_i, n_i), $1 \leq i \leq g$, heten de __karakteristieke paren van Puiseux__, $f(x)$ heet een __Puiseux ontwikkeling__ en g heet het __geslacht__ van de singulariteit.

__bew. (10.1)__ zie:

Pham, F. : " Singularités des courbes planes : une introduction à la géométrie analytique complexe."
Cours de 3e cycle, faculté des sciences de Paris, 1969-1970.

__Stelling__ (10.2) Het topologische type van de link van een analytisch irreducibel complexe polynoom fct. $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ met een geïsoleerde singulariteit in $(0,0)$, is volledig bepaald door de karakteristieke paren van Puiseux: $\{(m_i, n_i) \mid 1 \leq i \leq g\}$. Het is zl een geïtereerde ~~torusknoop~~ van het type $K(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$ met:

$$\lambda_1 = m_1 \quad \text{en} \quad \lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i , \quad 2 \leq i \leq g.$$

__bew. (10.2)__ zie: het hierboven genoemde boek van F. Pham
cf. Brauner, K.: "Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen," Abh. Math. Sem. Hamburg, 6 (1928), 1-54

Het bewijs komt erop neer dat de link van F met Puiseux ontwikkeling $f(x) = \sum_{i=0}^{g} a_i X^{\frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}} f_i\left(X^{\frac{1}{n_1 \cdots n_i}}\right)$ en de link behorend bij de Puiseux ontwikkeling:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{g} X^{\frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}} \quad , \text{hetzelfde type hebben.}$$

De link behorend bij de Puiseux ontwikkeling

$$\tilde{f}_1(x) = x^{\frac{m_1}{n_1}} \quad , (m_1, n_1) = 1 \quad \text{is de torusknoop } K_{m_1, n_1} \text{, want}$$

$$F_1(x,y) := \prod_{\xi \in U_{n_1}} \left(y - \xi^{m_1} x^{\frac{m_1}{n_1}}\right) = \prod_{\xi \in U_{n_1}} \left(y - \xi x^{\frac{m_1}{n_1}}\right) = \left(y^{n_1} - y^{m_1}\right) \quad \text{en de}$$

bijbehorende link is de torusknoop K_{m_1, n_1}, zoals we in het vb. op blz. 10-2 hebben gezien.
Met volledige inductie wordt dan aangetoond dat de link behorende bij de Puiseux ontwikkeling:

$$\bar{f}_{j+1}(x) := \sum_{i=1}^{j+1} x^{\frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}}$$ een (λ_{j+1}, n_{j+1}) torus knoop om de knoop behorend bij de Puiseux ontwikkeling
$$\bar{f}_j(x) := \sum_{i=1}^{j} x^{\frac{m_i}{n_1 \cdots n_i}}$$ is, met $\lambda_{j+1} = m_{j+1} - m_j n_{j+1} + \lambda_j n_j n_{j+1}$

Waarmee dan aangetoond is dat de link een geïtereerde torusknoop van het type $K(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$ is.

<u>opm.</u> In deze paragraaf beschouwen we knopen in de 3-sfeer: S^3, voor het berekenen van de eerste fundamentaalgroep van het complement van een knoop K maakt het niet uit of we K in de $\mathbb{R}^3$ of in de S^3 beschouwen. Want: stel K is een knoop in de S^3 en $P \in S^3 \setminus K$, dan is er een open ε-bol $U_\varepsilon(P)$ om P, met $U_\varepsilon(P) \cap K = \emptyset$, nu is $S^3 \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^3$.

Zij $U := (S^3 \setminus \{P\}) \setminus K$, $V := U_\varepsilon(P)$, dan is $U \cup V = S^3 \setminus K$ en $U \cap V = U_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$, samenhangend, dus $U \cap V$ heeft het homotopietype van een 2-sfeer, dus is enkelvoudig samenhangend. V is convex, dus $\pi_1(V) \cong \{1\}$. Met de stelling van Van Kampen is: $\pi_1(S^3 \setminus K) = \pi_1(U \cup V) \cong \pi_1(U) \underset{\pi_1(U \cap V)}{*} \pi_1(V) \cong \pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

Dus: $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

<u>Stelling</u> (10.3) Zij K een tamme knoop in $\mathbb{R}^3$ (S^3) en L de (λ, n) torusknoop om K, stel K heeft Wirtinger presentatie: $\langle x_1, \ldots, x_m \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1 \leq t < m \rangle$

Dan heeft de groep van de knoop L de presentatie:

$$\langle y, l, x_1, \ldots, x_m \mid l^n x_1^\lambda = y^n, \prod_{t=1}^{m} x_{j_t}^{-\varepsilon_t} x_1^{\Sigma\varepsilon_t}, x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1 \leq t < m \rangle$$

<u>bew.</u> (10.3) Zij K een tamme knoop met Wirtinger presentatie
$$\langle x_1, \ldots, x_m \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1 \leq t < m \rangle$$
en zij T een tubulaire omgeving van K, $h: S^1 \times D^2 \to T$ een homeomorfisme, $h': S^1 \times D^2 \to T$, $h'(x, y) := h(x, \frac{y}{2})$, zodat $h'(S^1 \times \{0\}) = K$ en $h'(S^1 \times \{1\})$ homoloog nul in $\mathbb{R}^3 \setminus K$ is. De lus parallel met K en basispunt boven x_1, is homotoop met $\prod_{t=1}^{m} x_{j_t}^{-\varepsilon_t}$, dus de longitudinaal $h'(S^1 \times \{1\})$ is homotoop met: $\prod_{t=1}^{m} x_{j_t}^{-\varepsilon_t} \cdot x_1^{\Sigma\varepsilon_t}$, want:

elke onderkruising geeft een $x_{j_t}^{-\varepsilon_t}$ en door met $x_i^{\varepsilon\varepsilon_i}$ te vermenigvuldigen, krijgen we een lus op de torus om k, die homotoop is met $h'(S^1 \times \{1\})$.

$k_{\lambda n} : S^1 \to (S^1 \times S^1) \subset (S^1 \times D^2)$, $k_{\lambda,n}(e^{2\pi i\theta}) = (e^{2\pi i n\theta}, e^{2\pi i\lambda\theta})$

$L := h' \cdot k_{\lambda,n}(S^1)$, L is de (λ,n) torusknoop om k.

$U := h(\{(x,y) \in S^1 \times \mathring{D}^2 \mid \ |y| < \frac{3}{4}$ en : $|y| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y}{|y|} \notin k_{\lambda n}(S^1)\}$

U is "$\frac{3}{4}$" van de tubulaire omgeving T om k, met daaruit weggelaten: het gedeelte "boven en buiten" L

$V := \mathbb{R}^3 \setminus h(\{(x,y) \in S^1 \times \mathring{D}^2 \mid |y| \leq \frac{1}{4}$ of $\frac{1}{4} \leq |y| \leq \frac{1}{2}$ en $\frac{y}{|y|} \in k_{\lambda n}(S^1)\}$

V is S^3 met daaruit weggelaten "$\frac{1}{4}$" van de volle torus T om k en het gedeelte "binnen en onder" L.

U en V zijn open en boogsamenhangend, $U \cup V = \mathbb{R}^3 \setminus L$.

$U \cap V = h(\{(x,y) \in S^1 \times \mathring{D}^2 \mid \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}$ en $\frac{y}{|y|} \notin k_{\lambda n}(S^1)\})$

$\cong (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \times ((S^1 \times S^1) \setminus k_{\lambda n}(S^1))$

$c : S^1 \times (0,2) \to (S^1 \times S^1) \setminus k_{\lambda n}(S^1)$

$(e^{2\pi i\theta}, s) \mapsto (e^{2\pi i(\lambda\theta + \frac{s}{2\lambda})}, e^{2\pi i\lambda\theta})$, is een homeomorfisme.

Dus $U \cap V \cong (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \times S^1 \times (0,2)$, dus $U \cap V$ heeft het homotopie type van een cirkel

$k \subset U$, k is een deformatie retract van U, want

$F : U \times [0,1] \to U$, $F(h(x,y), t) := h(x, ty)$

$F(h(x,y), 0) = h(x,0) \in k$, $F(h(x,y), 1) = h(x,y) = id_U(h(x,y))$

$F(h(x,0), t) = h(x, t\cdot 0) = h(x,0) \in k$.

Dus U heeft het homotopie type van een cirkel

$i : (U \cap V) \to U$, kies $P_0 := h'(e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2\lambda}}, 1)$ als basispunt.

$z : S^1 \to (U \cap V)$ $z(e^{2\pi i\theta}) := h'(e^{2\pi i(n\theta + \frac{1}{2\lambda})}, e^{2\pi i\lambda\theta})$, dan is $[z]$ een voortbrenger van $\pi_1(U \cap V, P_0)$

$$\gamma : [0,3] \to U \ , \ \gamma(t) := \begin{cases} h'(e^{2\pi i \frac{1}{2\lambda}}, 1-t) & \text{als } 0 \leq t \leq 1 \\ h'(e^{2\pi i(t + \frac{1}{2\lambda})}, 0) & \text{als } 1 \leq t \leq 2 \\ h'(e^{2\pi i \frac{1}{2\lambda}}, t-2) & \text{als } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Dan definieert y een lus met basispunt P_0, en $[y]$ is een voortbrenger van $\pi_1(U,P_0)$

$i_* : \pi_1(U\cap V, P_0) \to \pi_1(U, P_0)$, $i_*([z]) = [y]^n$.

$T' := h(\{(x,y)\in S^1\times \mathring{D}^2 \mid |y|<\frac{3}{4}\})$, T' is een tubulaire omgeving van k, dus $\mathbb{R}^3\setminus T'$ is een deformatie retract van $\mathbb{R}^3\setminus k$

$\mathbb{R}^3\setminus k$ is ook een deformatie retract van V.

$$\pi_1(V)\cong \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus T')\cong \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus k)\cong \| x_t, 1\le t\le m \mid x_{t+1}= x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1\le t<m \|$$

$$\cong \| l, x_1,\dots, x_m \mid \prod_{t=1}^{m} x_{j_t}^{-\varepsilon_t} x_1^{\Sigma\varepsilon_t} = l, \quad x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1\le t<m \|$$

x_1 is een meridiaan en l is een longitudinaal element, beide lussen liggen op de torus $\partial T'$ en brengen $\pi_1(\partial T')$ voort, z is een lus die om een torus om k wikkelt, n maal in de richting van de longitudinaal en λ maal in de richting van de meridiaan, dus:

$j: U\cap V\to V$, $j_*: \pi_1(U\cap V)\to \pi_1(V)$, $j_*([z]) = l^n x_1^{\lambda}$

Met de stelling van Van Kampen is $\pi_1(U\cup V)$ een gevezelde som van groepen:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \pi_1(U) \arrow[d] \\ \pi_1(V) \arrow[r] & \pi_1(U\cup V) = \pi_1(\mathbb{R}\setminus L). \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \langle z \mid \ \rangle \arrow[rr, "z\mapsto y^n"] \arrow[d, "z\mapsto l^n x_1^{\lambda}"'] \arrow[drr, phantom, "\circledast"] & & \langle y \mid \ \rangle \arrow[d] \\ \langle l, x_1,\dots,x_m \mid \prod_{t=1}^{m} x_{j_t}^{-\varepsilon_t} x_1^{\Sigma\varepsilon_t} = l,\ x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1\le t<m\rangle \arrow[rr] & & \pi_1(\mathbb{R}^3\setminus L) \end{tikzcd}$$

Dus $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus L) = \pi_1(U\cup V) \cong \| y, l, x_1,\dots,x_m \mid l^n x_1^{\lambda} = y^n,\ \prod_{t=1}^{m} x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_1 x_{j_t}^{-\varepsilon_t} = l,\ x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t}, 1\le t<m \|$

Hiermee is de stelling bewezen.

<u>Gevolg</u> (10.4) Zij $k(p,q)$ de (p,q) torusknoop, de groep van $k(p,q)$ heeft presentatie: $\langle x,y \mid x^p = y^q\rangle$

<u>bew.</u> (10.4) $k(p,q)$ is een (p,q) torusknoop om de triviale knoop, die heeft presentatie $\langle x \mid \ \rangle$, equivalent met $\langle l, x \mid l = 1\rangle$, dus volgs (10.3) heeft de groep van $k(p,q)$ de presentatie: $\langle y, l, x \mid l^q x^p = y^q,\ l = 1\rangle$

en deze is equivalent met: $< x, y \mid x^p = y^q >$. $\boxtimes$

<u>Stelling</u> (10.5) Zij L een (λ, μ) torusknoop om de tamme knoop k, $(\lambda, \mu) = 1$, dan is:

$$\tilde{E}_i = \Delta_{\lambda,\mu}(t) \cdot E_i(t^\mu) + E_{i-1}(t^\mu),$$

$$\tilde{\Delta}_1(t) = \Delta_{\lambda,\mu}(t) \cdot \Delta_1(t^\mu) ,$$

waarin Δ_1 en $\tilde{\Delta}_1$ het eerste Alexanderpolynoom van k resp. L is, E_i en $\tilde{E}_i$ het i^e elementaire ideaal van k resp L is, en $E_i(t^\mu)$ het ideaal voortgebracht door de elementen $f(t^\mu)$, met $f(t) \in E_i$,

en $\Delta_{\lambda,\mu}(t) := \dfrac{(t^{\lambda\mu}-1)(t-1)}{(t^\lambda-1)(t^\mu-1)}$, $E_{-1} := (0)$

<u>bew.</u> (10.5)

Zij: $< x_1, \ldots, x_m \mid x_{t+1} = x_{j_t}^{\varepsilon_t} x_t x_{j_t}^{-\varepsilon_t} , 1 \leq t \leq m > \cdots (*)$ $(x_{m+1} := x_1)$

een Wirtinger presentatie van de groep G van de tamme knoop k, (zie stelling 7.1).

$$\mathbb{Z}[F(x_1, \ldots, x_m)] \xrightarrow{q} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{a} \mathbb{Z}[G^{ab}] \cong \mathbb{Z}[x, x^{-1}],$$

$$aq(x_j) = x , \quad \forall\, 1 \leq j \leq m$$

$$A_{ij}(x) = aq\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}] , \quad 1 \leq i,j \leq m \qquad , r_i := x_{i+1} x_{j_i}^{\varepsilon_i} x_i^{-1} x_{j_i}^{-\varepsilon_i} .$$

$\{A_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ is een Alexandermatrix van de presentatie $(*)$.

Omdat $r_m = 1$ een gevolg is van de relaties $r_i = 1$; $1 \leq i < m$ (St. 7.1) en vanwege stelling 10.3, heeft de groep H van de knoop L de presentatie:

$$< y, \ell, x_1, \ldots, x_m \mid \ell^\mu x_1^\lambda = y^\mu, \prod_{i=1}^{m} x_{j_i}^{-\varepsilon_i} x_1^{\varepsilon\varepsilon_j} , \quad r_i = 1 \quad 1 \leq i \leq m > \cdots (**)$$

Voor de abels gemaakte groep H^{ab} geldt:

$x_1 = x_j$, $1 \leq j \leq m$, $\ell = \prod_{i=1}^{m} x_{j_i}^{-\varepsilon_i} x_1^{\varepsilon\varepsilon_j} = \prod_{i=1}^{m} x_j^{-\varepsilon_i} x_1^{\varepsilon\varepsilon_j} = 1$

$\ell^\mu x_1^\lambda = y^\mu$, dus $1^\mu \cdot x_1^\lambda = y^\mu$, $(\lambda, \mu) = 1$ dus $x_1 = t^\mu$ en $y = t^\lambda$

$H^{ab} \cong \{ t^i \mid i \in \mathbb{Z} \}$.

Dus

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}[F(x_1,\dots,x_m)] & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z}[G] & \xrightarrow{a} & \mathbb{Z}[G^{ab}] \cong \mathbb{Z}[X,X^{-1}] \\
 & x_i \mapsto X & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z}[F(y,\ell,x_1,\dots,x_m)] & \xrightarrow{\bar q} & \mathbb{Z}[H] & \xrightarrow{\bar a} & \mathbb{Z}[H^{ab}] \cong \mathbb{Z}[t,t^{-1}]
\end{array}$$

$$\ell \mapsto t^0 \;,\quad x_i \mapsto t^n \;,\quad y \mapsto t^\lambda .$$

- Laat $\{B_{ij}(t)\}_{1\le i,j\le m+2}$ de Alexandermatrix behorend bij de presentatie $(**)$ zijn.

De eerste relator s_1 is: $\ell^n x_1^\lambda y^{-n}$

Dus $B_{11}(t) = \bar a\bar q\left(\frac{\partial}{\partial y}(\ell^n x_1^\lambda y^{-n})\right) = -\bar a\bar q\left(\frac{\partial y^n}{\partial y}\right) = -\bar a\bar q\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right) = -\left(\frac{t^{\lambda n}-1}{t^\lambda-1}\right)$

$B_{12}(t) = \bar a\bar q\left(\frac{\partial}{\partial \ell}(\ell^n x_1^\lambda y^{-n})\right) = \bar a\bar q\left(\frac{\partial \ell^n}{\partial \ell}\right) = \bar a\bar q(1+\ell+\dots+\ell^n) = 1+\dots+1 = n$

$B_{13}(t) = \bar a\bar q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\ell^n x_1^\lambda y^{-n})\right) = \bar a\bar q\left(\ell^n \frac{\partial x_1^\lambda}{\partial x_1}\right) = 1^n\cdot \bar a\bar q\left(\frac{x_1^\lambda-1}{x_1-1}\right) = \left(\frac{t^{n\lambda}-1}{t^n-1}\right)$

$B_{1,j+2}(t) = 0$ als $1<j\le m$, want x_j komt niet in s_1 voor als $1<j\le m$.

- De tweede relator s_2 van $(**)$ is: $\prod_{i=1}^{m} x_{j_i}^{-\varepsilon_i} x_1^{\varepsilon_{j_i}} \ell^{-1}$.

Dus: $B_{21}(t) = 0$, want y komt niet in s_2 voor.

$B_{22}(t) = \bar a\bar q\left(\frac{\partial s_2}{\partial \ell}\right) = -\bar a\bar q\left(\frac{\partial \ell}{\partial \ell}\right) = -1$

- De $(i+2)^e$ relator van $(**)$ is de i^e relator van $(*)$ en de $(j+2)^e$ voortbrenger van $(**)$ is de j^e voortbrenger van $(*)$, verder is $\bar a\bar q(x_i) = t^n$ en $aq(x_i) = X$, dus $B_{i+2,j+2}(t) = A_{ij}(t^n)$, $1\le i,j\le m$ en $B_{i+2,j}(t) = 0$ als $j=1,2$, $1\le i\le m$, omdat y en ℓ niet in r_i voorkomen.

Dus:

$$B = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} y & \ell & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|cccc}
\left(\frac{t^{\lambda n}-1}{t^\lambda-1}\right) & n & \left(\frac{t^{\lambda n}-1}{t^n-1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & B_{23} & B_{24} & \cdots & B_{2,m+2} \\ \hline
0 & 0 & A_{11}(t^n) & A_{12}(t^n) & \cdots & A_{1m}(t^n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & A_{m1}(t^n) & A_{m2}(t^n) & \cdots & A_{mm}(t^n)
\end{array}\right)
\end{array}$$

De relator s, $s = \prod_{i=1}^{m} x_{j_i}^{-\varepsilon_i} x_1^{\varepsilon\varepsilon_j} \in F(x_1, \dots, x_m)$

$\bar{a}\bar{q}(s) = 1$, $\bar{a}\bar{q}(x_j) = t^n$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$, dus vlgs Lemma (9.1)

is $\sum_{j=1}^{m} B_{2,j+2} = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}\bar{q}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}\bar{q}\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = 0$

Om dezelfde reden is

$\sum_{j=1}^{m} B_{i+2,j+2} = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq m$ (zie: blz. 9-7)

Dus als we de laatste $(m-1)$ kolommen van B, bij de 3^e kolom optellen, dan krijgen we een equivalente matrix die er als volgt uit ziet:

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{\lambda n}-1}{t^{2}-1} & n & \frac{t^{\lambda n}-1}{t^{n}-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & B_{24} & \cdots & B_{2,m+2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{12}(t^n) & \cdots & A_{1,m}(t^n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{m,2}(t^n) & \cdots & A_{m,m}(t^n) \end{pmatrix}$$

We tonen nu aan dat er $b_i \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$, $1 \leq i \leq m$, zijn, zdd.

$B_{2,j+2} + \sum_{i=1}^{m} b_i A_{ij} = 0$, $x := t^n$, voor $2 \leq j \leq m$

Beschouw de $(m-1)$ vergelijkingen in de $(m-1)$ onbekenden $a_1, \dots, a_{m-1}$ over de ring $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$:

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i A_{ij} = A_{mj} \qquad 2 \leq j \leq m \quad \dots\dots (1)$$

Zij $A(i,j)$ de matrix die uit A ontstaat door de i^e rij en de j^e kolom weg te laten.

Het stelsel vgl'n (1) kunnen we ook in een matrix vgl. schrijven

$$A'(m,1)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m2} \\ \vdots \\ A_{mm} \end{pmatrix}$$

Volgens de "Regel van Cramer" is:

$$\det(A(m,1)) \cdot a_i = \det\begin{pmatrix} A_{12} & \cdots & A_{i-1,2} & A_{m2} & A_{i+1,2} & \cdots & A_{m-1,2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1m} & \cdots & A_{i-1,m} & A_{mm} & A_{i+1,m} & \cdots & A_{m-1,m} \end{pmatrix} = \det(A(i,1))$$

Volgens blz 9-7, is $\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & A(i,1) \\ 0 & \end{pmatrix}$ een Alexandermatrix van de knoop K, dus $(\det A(i,1)) = E_1(K) = (\Delta_1(x))$.

dus er zijn eenheden e_i in $\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$ zodd. $\det A(i,1) = e_i \Delta_1(x)$.

Dus: $e_m \cdot \Delta_1 \cdot a_i = e_i \cdot \Delta_1$, $\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$ heeft geen nuldeler en $\Delta_1 \neq 0$, want $\Delta_1(1) = \pm 1$ (opm. blz. 9-0)

dus $e_m \cdot a_i = e_i$, $e_m^{-1} \in \mathbb{Z}[x,x^{-1}]$, dus als we voor a_i, $a_i := e_i e_m^{-1}$ nemen, dan is $(a_1,\dots,a_{m-1})$ een oplossing van (1).

bovendien is $a_i \in (\mathbb{Z}[x,x^{-1}])^*$, dus $\exists d_i \in \mathbb{Z}$: $a_i = \pm x^{d_i}$

$$A_{ij}(x) = aq\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = aq\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_{i+1}\, x_{j_i}^{\varepsilon_i}\, x_i^{-1}\, x_{j_i}^{-\varepsilon_i}\right)\right) = \delta_{i+1,j} - x^{\varepsilon_i}\delta_{i,j} + (x^{\varepsilon_i}-1)\,\delta_{j_i,j}$$

Neem $a_m := -1$, dan is $\sum_{i=1}^m a_i(x) A_{ij}(x) = 0$ voor $2 \le j \le m$, dus

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i(1)\, A_{ij}(1) = \sum_{i=1}^m a_i(1)[\delta_{i+1,j} - \delta_{i,j}] = a_{j-1}(1) - a_j(1)$$, dus voor $2 \le j \le m$

dus $a_1(1) = a_2(1) = \cdots = a_m(1) = -1$, dus $a_i = -x^{d_i}$

Verder is voor $2 \le j \le m$:

$$B_{2,j+2} = \bar{a}\bar{q}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_j}\right) = aq\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\prod_{i=1}^m x_{j_i}^{-\varepsilon_i}\right)\right) = \sum_{i=1}^m x^{-v_{i-1}}\left(\frac{x^{-\varepsilon_i}-1}{x-1}\right)\delta_{j_i,j}$$, waarin $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_i =:$

$$\sum_{i=1}^m x^{-v_i} A_{ij} = \sum_{i=1}^m x^{-v_i}\left[\delta_{i+1,j} - x^{\varepsilon_i}\delta_{ij} + (x^{\varepsilon_i}-1)\,\delta_{j_i,j}\right]$$

$$= x^{-v_{j-1}} - x^{-v_j}\cdot x^{\varepsilon_j} + \sum_{i=1}^m x^{-v_i}(x^{\varepsilon_i}-1)\,\delta_{j_i,j}$$

$$= 0 - \sum_{i=1}^m x^{-v_{i-1}}(x^{-\varepsilon_i}-1)\,\delta_{j_i,j} = -(x-1)\,B_{2,j+2}$$, voor $2 \le j \le m$

Dus: $0 = (x-1)\,B_{2,j+2} + \sum_{i=1}^m x^{-v_i}A_{ij}$

$$\sum_{i=1}^m x^{-v_i}A_{ij} = \sum_{i=1}^{m-1} x^{-v_i}A_{ij} + x^{-v_m}A_{mj} = \sum_{i=1}^{m-1} x^{-v_i}A_{ij} + -\sum_{i=1}^{m} x^{-v_m}\, a_i A_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\left(x^{-v_i} + x^{-v_m}a_i\right)A_{ij} = \sum_{i=1}^{m-1}\left(x^{-v_i} - x^{-v_m+d_i}\right)A_{ij}$$, voor $2 \le j \le m$.

$x^{-v_i} - x^{-v_m+d_i} = (x-1)\cdot b_i$, $b_i \in \mathbb{Z}[x,x^{-1}]$, $1 \le i \le m-1$, $b_m := 0$

Dus: $0 = (x-1)\,B_{2,j+2} + \sum_{i=1}^m x^{-v_i}A_{ij} = (x-1)\,B_{2,j+2} + \sum_{i=1}^{m-1}(x-1)\,b_i A_{ij}$, voor $2 \le j \le m$

$\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$ heeft geen nuldelers, en $x-1 \neq 0$, $b_m := 0$, dus

$0 = B_{2,j+2} + \sum_{i=1}^m b_i A_{ij}$ voor $2 \le j \le m$

Als we dus de $(i+2)^e$ rij met b_i vermenigvuldigen, $1 \le i \le$ en vervolgens de laatste m rijen bij de 2^e rij optellen in de matrix op blz. 10-12, dan krijgen we een matrix met in de tweede rij $(0 \; -1 \; 0 \; 0 \cdots 0)$ en in de tweede kolom $\begin{pmatrix} n \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, die n kunnen we met de 2^e rij wegvegen. We krijgen dan een equivalente matrix C die er alsvolgt uitziet:

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{\lambda n}-1}{t^{\lambda}-1} & \frac{t^{\lambda n}-1}{t^{n}-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{12}(t^n) & \cdots & A_{1m}(t^n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & A_{m2}(t^n) & \cdots & A_{mm}(t^n) \end{pmatrix} =: C$$

Waarin het vierkant een Alexandermatrix voor de knoop K staat, als we $x = t^n$ nemen.
Zij $\tilde{E}_i$ het i^e elementaire ideaal van L, dan is $\tilde{E}_i = E_i(C)$.
Aan de vorm van C zien we direkt:

$$\tilde{E}_i = E_i(C) = E_{i-1}(t^n) + \left(\frac{t^{\lambda n}-1}{t^{\lambda}-1}, \frac{t^{\lambda n}-1}{t^{n}-1}\right) E_i(t^n) = E_{i-1}(t^n) + \Delta_{\lambda,n}(t) \cdot E_i(t^n).$$

(waarin E_i en $E_i(t^n)$ zijn gedefinieerd op blz. 10-10) en omdat
$$\left(\frac{t^{\lambda n}-1}{t^{\lambda}-1}, \frac{t^{\lambda n}-1}{t^{n}-1}\right) = (\Delta_{\lambda,n}(t)).$$

Dus $\tilde{E}_1 = \Delta_{\lambda,n}(t) \cdot E_1(t^n) = \Delta_{\lambda,n}(t) \cdot (\Delta_1(t^n)) = (\Delta_{\lambda,n}(t) \cdot \Delta_1(t^n))$.

$$\Delta_{\lambda,n}(1) \cdot \Delta_1(1^n) = 1 \cdot \Delta_1(1) > 0$$

Dus $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_{\lambda,n}(t) \cdot \Delta_1(t^n)$.

Hiermee is stelling (10.5) bewezen.

Gevolg (10.6) Zij k de geïtereerde torusknoop van het type $k(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$, dan is het eerste Alexander polynoom van k gelijk aan:

$$\Delta_{\lambda_g n_g}(t) \cdot \Delta_{\lambda_{g-1} n_{g-1}}(t^{n_g}) \ldots\ldots \Delta_{\lambda_i, n_i}(t^{n_{i+1} \cdots n_g}) \ldots\ldots \Delta_{\lambda_1 n_1}(t^{n_2 \cdots n_g})$$

waarin $\Delta_{\lambda n}(t) := \dfrac{(t^{\lambda n}-1)(t-1)}{(t^{\lambda}-1)(t^{n}-1)}$

bew. (10.6) Dit volgt door de vorige stelling g maal toe te passen

opm. Uit (10.6) volgt dat iedere geïtereerde torusknoop en dus iedere algebraïsche knoop een Alexanderpolynoom heeft dat het produkt is van cyclotomische polynomen Φ_d.
Dus de figuurachtknoop, met eerste Alexanderpolynoom: $1-3t+t^2$, is dus geen algebraïsche knoop.

Gevolg (10.7) Zij $\Delta_1(t)$ het eerste Alexanderpolynoom van de geïtereerde torusknoop $k(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$, en $\Delta_2(t)$ de tweede, stel $\Delta_1(t) = \prod_{d \in A} \Phi_d^{\,z_d}$, waarin $z_d \in \mathbb{N}, z_d \geq 1$ en Φ_d het d^e cyclotomische polynoom is, dan is $\Delta_2(t) = \prod_{d \in A} \Phi_d^{\,z_d - 1}$ en het 2^e elementaire ideaal is een hoofdideaal.

bew. (10.7) Het bewijs gaat met inductie naar g.
Voor $g=0$ is de bewering triviaal, stel we hebben voor de geïtereerde torusknoop $k(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_{g-1}, n_{g-1})$ met eerste en tweede Alexanderpolynoom resp. $\Delta_1(x)$ en $\Delta_2(x)$ het gestelde bewezen.
Dan is voor de geïtereerde torusknoop $k(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$

$$\tilde{\Delta}_1(t) = \Delta_{\lambda_g, n_g}(t) \cdot \Delta_1(t^n) \quad \text{en}$$

$$\tilde{E}_2 = E_1(t^n) + \Delta_{\lambda_g, n_g} E_2(t^n) = (\Delta_1(t^n)) + \Delta_{\lambda_g, n_g}(\Delta_2(t^n))$$

$$= (\Delta_1(t^n), \Delta_{\lambda_g, n_g}(t) \cdot \Delta_2(t^n)) = \Delta_2(t^n)\left(\frac{\Delta_1(t^n)}{\Delta_2(t^n)}, \Delta_{\lambda_g, n_g}(t)\right)$$

Zij $B_1 := \{ z \in \mathbb{N} \mid$ een primitieve z^e machts eenheidswortel is nulpunt van $\Delta_{\lambda_g, n_g}(t) \}$

$B_2 := \{ z \in \mathbb{N} \mid$ een primitieve z^e machts eenheidswortel is nulpunt van $\dfrac{\Delta_1(t^n)}{\Delta_2(t^n)} \}$

Voor een polynoom $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ geldt: f heeft slechts enkelvoudige nulpunten desda $f(t)$ en $\dot{f}(t)$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben.

Mbv dit criterium en het gegeven $(\lambda_g, n_g) = 1$ is in te zien dat $\Delta_{\lambda_g, n_g}(t)$ slechts enkelvoudige nulpunten heeft. dus $\Delta_{\lambda_g, n_g} = \prod_{\beta \in B_1} \Phi_\beta(t)$

$$\Delta_1(x) = \prod_{\alpha \in A} \Phi_\alpha^{r_\alpha} \quad \text{en} \quad \Delta_2(x) = \prod_{\alpha \in A} \Phi_\alpha^{r_\alpha - 1}, \; r_\alpha \in \mathbb{N}, \; r_\alpha \geq 1 \text{ (ind. hyp.)}$$

dus $\dfrac{\Delta_1(x)}{\Delta_2(x)} = \prod_{\alpha \in A} \Phi_\alpha(x)$ heeft slechts enkelvoudige nulpunten en 0 is geen nulpunt.

Met bovenstaande criterium volgt voor $f(x) \in \mathbb{C}[x]$:
$f(x)$ heeft slechts enkelvoudige nulpunten, $f(0) \neq 0 \Rightarrow$
$f(t^n)$ heeft slechts enkelvoudige nulpunten.

Dus $\dfrac{\Delta_1(t^n)}{\Delta_2(t^n)}$ heeft slechts enkelvoudige nulpunten, dus:

$$\frac{\Delta_1(t^n)}{\Delta_2(t^n)} = \prod_{\beta \in B_2} \Phi_\beta(t)$$

$$\left(\frac{\Delta_1(t^n)}{\Delta_2(t^n)}, \Delta_{\lambda_g, n_g}(t) \right) = \left(\prod_{\beta \in B_1} \Phi_\beta, \prod_{\beta \in B_2} \Phi_\beta \right) = \prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta \left(\prod_{\beta \in B_1 \setminus B_2} \Phi_\beta, \prod_{\beta \in B_2 \setminus B_1} \Phi_\beta \right)$$

$$= \prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta \, (1) = \left(\prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta \right), \text{ want } (B_1 \setminus B_2) \cap (B_2 \setminus B_1) = \emptyset.$$

Dus: $\tilde{E}_2 = \left(\Delta_2(t^n) \cdot \prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta(t) \right)$ is een hoofdideaal en

$$\tilde{\Delta}_2(t) = \Delta_2(t^n) \cdot \prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta(t)$$

Dus $$\frac{\tilde{\Delta}_1(t)}{\tilde{\Delta}_2(t)} = \frac{\Delta_1(t^n) \cdot \Delta_{\lambda_g, n_g}(t)}{\Delta_2(t)^n \cdot \prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta(t)} = \frac{\Delta_1(t^n)}{\Delta_2(t^n)} \cdot \frac{\Delta_{\lambda_g, n_g}(t)}{\prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta(t)} = \prod_{\beta \in B_1} \Phi_\beta \cdot \frac{\prod_{\beta \in B_2} \Phi_\beta}{\prod_{\beta \in B_1 \cap B_2} \Phi_\beta} = \prod_{\beta \in B_1 \cup B_2} \Phi_\beta$$

Dus $\dfrac{\tilde{\Delta}_1}{\tilde{\Delta}_2}$ heeft slechts enkelvoudige nulpunten.

Zij $B := B_1 \cup B_2$, dan zijn er $s_\beta \in \mathbb{N}$, $s_\beta \geq 1$ zdd.

$$\frac{\tilde{\Delta}_1}{\tilde{\Delta}_2} = \prod_{\beta \in B} \Phi_\beta, \quad \tilde{\Delta}_1(t) = \prod_{\beta \in B} \Phi_\beta^{s_\beta}$$

dus $\tilde{E}_2 = (\tilde{\Delta}_2(t))$ en $\tilde{\Delta}_2(t) = \prod_{\beta \in B} \Phi_\beta^{s_\beta - 1}$

Met volledige inductie volgt het gestelde. $\boxtimes$

opm. De torusknopen $k(\lambda_1 n_2, n_1)$ en $k(\lambda_1, n_1, n_1, n_2)$ met $(\lambda_1, n_1) = 1$ en $(n_1, n_2) = 1$, hebben hetzelfde Alexander polynoom, want:

$$\Delta_{n_1, n_2}(t)\, \Delta_{\lambda_1, n_1}(t^{n_2}) = \frac{(t^{n_1 n_2} - 1)(t-1)}{(t^{n_1} - 1)(t^{n_2} - 1)} \cdot \frac{(t^{\lambda_1 n_1 n_2} - 1)(t^{n_2} - 1)}{(t^{\lambda_1 n_2} - 1)(t^{n_1 n_2} - 1)} =$$

$$= \frac{(t^{\lambda_1 n_2 n_1} - 1)(t-1)}{(t^{\lambda_1 n_2} - 1)(t^{n_1} - 1)}$$

Toch zijn de algebraïsche knopen onderling te onderscheiden dmv. het Alexanderpolynoom, omdat op de $\{(\lambda_i, n_i)\}_{i=1}^{g}$ van $k(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$ behorend bij een algebraïsche knoop restricties liggen:

Lemma (10.8) Als $\lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i$, $1 < i \leq g$ en $\lambda_1 = m_1$ en $m_i, n_i \geq 2$, dan is $\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1}$ voor $1 < i \leq g$

bew. (10.8) Met volledige inductie volgt: $\lambda_i \geq m_i$, want $\lambda_1 = m_1$ en stel $\lambda_{i-1} \geq m_{i-1}$ dan is:

$\lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \geq m_i - m_{i-1} n_i + m_{i-1} n_{i-1} n_i = m_i + m_{i-1} n_i (n_{i-1} - 1) \geq$ want $n_i \geq 1$.

Dus $\lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i > -\lambda_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i = \lambda_{i-1} n_{i-1} \left(n_i - \frac{n_i}{n_{i-1}} \right)$

$n_j \geq 2$ voor $j \geq 1$, dus $n_i - \frac{n_i}{n_{i-1}} \geq n_i - \frac{n_i}{2} = \frac{n_i}{2} \geq 1$

Dus $\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1}$, voor $1 < i \leq g$

Stelling (10.9) Stel $k(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_g, n_g)$ en $k(\lambda_1', n_1', \ldots, \lambda_h', n_h')$ zijn twee geïtereerde torusknopen met:

$(\lambda_i, n_i) = 1$, $\lambda_i > n_i \geq 2$ voor $1 \leq i \leq g$ en $\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1}$ voor $1 < i \leq g$,
$(\lambda_j', n_j') = 1$, $\lambda_j' > n_j' \geq 2$ voor $1 \leq j \leq h$ en $\lambda_j' > \lambda_{j-1}' n_{j-1}'$ voor $1 < j \leq h$.

Als beide knopen equivalent zijn, dan is:
$g = h$ en $\lambda_i = \lambda_i'$ en $n_i = n_i'$ voor $1 \leq i \leq g$

bew. (10.9) $\lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1}$ voor $1 < i \leq g$, dus met inductie volgt:
$\lambda_g > \lambda_i n_i \cdots n_{g-1}$, dus $\lambda_g n_g > \lambda_i n_i \cdots n_g$.

Zij ξ een nulpunt van $\Delta(t)$, het eerste Alexanderpolynoom van $k(\lambda_1 n_1, \ldots, \lambda_g', n_g')$, dan is volgens (10.6) er een i, met ξ is nulpunt van $\Delta_{\lambda_i, n_i}(t^{n_{i+1} \cdots n_g})$, dus ξ is een $\lambda_i n_i n_{i+1} \cdots n_g$ e machts eenheidswortel.

Δ_{λ_g, n_g} deelt $\Delta(t)$, dus alle $\lambda_g n_g^e$ machts eenheidswortels zijn nulpunten van $\Delta(t)$.

Stel $A := \{ \lambda \in \mathbb{N} \mid \Delta(t)$ heeft een primitieve λ^e machts eenheids-wortel $\}$

volgens bovenstaande is $\max A = \lambda_g n_g$

Zij $A' := \{ \beta \in \mathbb{N} \mid \Delta'(t)$ heeft een primitieve β^e machts eenheidswortel $\}$, waarin $\Delta'(t)$ het eerste Alexanderpolynoom van $K(\lambda'_1, n'_1, \ldots, \lambda'_h, n'_h)$ is, dan is ook $\max A' = \lambda'_h n'_h$

De beide geïtereerde torusknopen zijn equivalent, dus $\Delta(t) = \Delta'(t)$, dus $A = A'$, dus $\lambda_g n_g = \max A = \max A' = \lambda'_h n'_h$

Zij ξ een λ^e machts primitieve eenheidswortel en $\lambda \mid \lambda_g n_g$ en $\lambda > \lambda_g$, dan is ξ een nulpunt van $\Delta_{\lambda_g n_g}(t)$.

want $\lambda > \lambda_g > n_g$, dus ξ is een nulpunt van $\Delta(t)$.

λ_g deelt $\lambda_g n_g$ en een λ_g^e machts primitieve eenheidswortel is geen wortel van $\Delta(t)$, want: zij ξ zo'n λ_g^e mpew en stel ξ is nulpunt van $\Delta(t)$, dan is ξ geen nulpunt van $\Delta_{\lambda_g n_g}(t)$, dus er is een $1 \leq i < g$, met: ξ is nulpunt van $\Delta_{\lambda_i n_i}(t^{n_{i+1} \cdots n_g})$, dus λ_g deelt $\lambda_i n_i n_{i+1} \cdots n_g$, λ_g en n_g zijn onderling priem, dus λ_g deelt $\lambda_i n_i n_{i+1} \cdots n_{g-1}$, dus $\lambda_g \leq \lambda_i n_i \cdots n_{g-1}$, maar $\lambda_g > \lambda_i n_i \cdots n_{g-1}$, tegenspraak.

Dus λ_g is de grootste deler van $\max(A)$, die niet in A voorkomt, evenzo is λ'_h de grootste deler van $\max(A')$, die niet in A' voorkomt, $A = A'$, dus $\lambda_g = \lambda'_h$.

$\lambda_g n_g = \lambda'_h n'_h$, dus $n_g = n'_h$

Stel $F(t)$ en $F'(t)$ zijn de eerste Alexanderpolynomen van resp. $K(\lambda_1, n_1, \ldots, \lambda_{g-1}, n_{g-1})$ en $K(\lambda'_1, n'_1, \ldots, \lambda'_{h-1}, n'_{h-1})$, dan is:

$$F(t^{n_g}) = \frac{\Delta(t)}{\Delta_{\lambda_g n_g}(t)} = \frac{\Delta'(t)}{\Delta_{\lambda'_h n'_h}(t)} = F'(t^{n'_h}) = F'(t^{n_g})$$

Dus $F(t) = F(t')$:

Met volledige inductie volgt: $g = h$ en $\lambda_i = \lambda'_i$ en $n_i = n'_i$ voor $1 \leq i \leq g$. ☒

Gevolg (10.10) Als twee algebraïsche knopen k en k' behorend bij resp. de karakteristieke paren $\{(m_i,n_i)\}_{i=1}^{g}$ en $\{(m_i',n_i')\}_{i=1}^{h}$, hetzelfde type hebben, dan is $g=h$ en $m_i=m_i'$ en $n_i=n_i'$ voor $1\le i\le g$.

bew. (10.10) De knopen k en k' zijn resp. de geïtereerde torusknopen $k(\lambda_1,n_1,\dots,\lambda_g,n_g)$ en $k(\lambda_1',n_1',\dots,\lambda_h',n_h')$ met:

$\lambda_1=m_1$, $\lambda_i=m_i-m_{i-1}n_i+\lambda_{i-1}n_{i-1}n_i$, $1<i\le g$, $n_i\ge 2$ en

$\lambda_1'=m_1'$, $\lambda_i'=m_i'-m_{i-1}'n_i'+\lambda_{i-1}'n_{i-1}'n_i'$, $1<i\le h$, $n_i'\ge 2$ en

$m_i>m_{i-1}n_i$, $m_i'>m_{i-1}'n_i'$, $m_1>n_1$ en $m_1'>n_1'$ (volgens st. (10.1) ad 2),

Dus: $\lambda_i>\lambda_{i-1}n_{i-1}n_i>n_i$, evenzo is $\lambda_i'>n_i'$.

Volgens lemma (10.8) is $\lambda_i>\lambda_{i-1}n_{i-1}$ en $\lambda_j'>\lambda_{j-1}'n_{j-1}'$ voor $1<i\le g$, $1<j\le h$

Volgens stelling (10.9) is dan: $g=h$ en $\lambda_i=\lambda_i'$ en $n_i=n_i'$, $1\le i\le g$

De toevoegingen: $m_i\mapsto\lambda_i$ en $m_i'\mapsto\lambda_i'$ zijn injectief, dus

$g=h$, $m_i=m_i'$ en $n_i=n_i'$ voor $1\le i\le g$. $\boxtimes$

zie ook:

Lê Dũng Tráng: "Sur les noeuds algébriques", blz. 295–298
Compositio Mathematica, 25 (1972).

en:

Burau, W: "Kennzeichnung der Schlauchknoten",
Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932), 125–133.

§11 Monodromie

Def. Een viertal (F, E, π, B) heet een vezelbundel, als F, E en B topologische ruimte zijn en π een continue afbeelding, $\pi: E \to B$, zdd $\forall x \in B$ $\exists U$ open in B, $x \in U$ en een homeomorfisme $\varphi: \pi^{-1}(U) \to U \times F$, zdd $\pi / \pi^{-1}(U) = p_1 \cdot \varphi$, waarin $p_1 : U \times F \to U$ de projectie op de eerste faktor is.

opm. Als de betrokken ruimten E, F en B manifolds zijn, π en de φ's, C^∞ afbeeldingen, dan heet (F, E, π, B) een differentieerbare (of C^∞) vezelbundel.
E heet de totale ruimte, B de basisruimte, F de vezel.

Stelling (11.1) (Vezelingsstelling van Milnor)

Zij $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ een polynoom $\neq 0$, kwadraatvrij, en stel dat de afbeelding $F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ een singulariteit in $(0,0)$ heeft, $F(0,0) = 0$, dan is er een $\varepsilon > 0$ zdd $(0,0)$ het enige singuliere punt in $B_\varepsilon(0)$ is en

$\varphi: (S^1_\varepsilon \setminus K) \to S^1$, met $\varphi(x,y) := \dfrac{F(x,y)}{|F(x,y)|}$ een C^∞ vezelbundel is met vezel F_1, een samenhangend open oppervlak, de rand van F_z in S^1_ε is K, $\forall z \in S^1$. Hierin is:

$B_\varepsilon(0) := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2\}$, $\partial B_\varepsilon(0) = S^1_\varepsilon$ en $F_z := \varphi^{-1}(z)$, $z \in S^1$, $K = S^1_\varepsilon \cap F($

bew. (11.1) zie: het al eerder genoemde boek van J. Milnor

Def. Zij $Iso(F) :=$ Autohomeomorfismen van F, modulo isotopie

Er is een groepsmorfisme $M: \pi_1(B, x_0) \to Iso(F_{x_0})$, voor elke vezelbundel (F, E, π, B), die de monodromie wordt genoemd, en als volgt wordt gedefinieerd:

$F_x := \pi^{-1}(x)$, voor $x \in B$, als $x, y \in U \subset B$ en $\varphi: \pi^{-1}(U) \to U \times F$ een homeomorfisme, zdd $\pi / \pi^{-1}(U) = p_1 \cdot \varphi$, ψ de inverse van φ dan is $\varphi(P) = (\pi(P), \varphi_2(P))$, definieer $h^\psi_{xy} : F_x \to F_y$ door:

$h^\psi_{xy}(P) := \psi(y, \varphi_2(P))$, dan is $h^\psi_{xy} : F_x \to F_y$ een homeomorfisme met inverse h^ψ_{yx}.

Zij $w:[0,1]\to B$ een lus met basispunt x_0; $w(0)=x_0=w(1)$
Vanwege de compactheid van $[0,1]$ en omdat $\pi: E\to B$ een vezelbundel is, is er een $N\in\mathbb{N}$, en zijn er open verzamel. U_j in B, en homeomorfismen $\varphi_j:\pi^{-1}(U_j)\to U_j\times F$, zodat $p_1\varphi_j=\pi|\pi^{-1}(U_j)$ en $[\frac{j}{N},\frac{j+1}{N}]\subset w^{-1}(U_j)$, $0\le j<N$

Definieer $h: F_{x_0}\to F_{x_0}$ door $h := h^{\varphi_{N-1}}_{x_{N-1}x_0}\cdots h^{\varphi_1}_{x_1x_2}\, h^{\varphi_0}_{x_0x_1}$, met $x_j := w(\frac{j}{N})$ en $x_0=w(1)=w(\frac{N}{N})=x_N$, h is een homeomorfisme.

Aangetoond kan worden dat voor een lus w' met basispt. en bijbehorend autohomeomorfisme $h': F_{x_0}\to F_{x_0}$ geldt:

w en w' homotoop in B $\Rightarrow$ h en h' zijn isotoop

Dus er is een welgedefinieerde afbeelding $M:[w]\mapsto[h]$, $[w]$ de homotopieklasse van w, en $[h]$ de isotopieklasse van h, dus

$M:\pi_1(B,x_0)\to \mathrm{Iso}(F_{x_0})$, M is een homomorfisme.

$M(\pi_1(B,x_0))$ wordt de <u>monodromiegroep</u> van de bundel genoemd.

<u>vb</u> In het speciale geval dat $B\cong S^1$ is $\pi_1(B,x_0)\cong\mathbb{Z}$.
Zij $[w]$ een voortbrenger van $\pi_1(B,x_0)$ en h een autohomeomorfisme van F_{x_0}, behorend bij w: $M[w]=[h]$, dan is het volgende diagram commutatief:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times F}\big/\{((0,f),(1,h(f)))\mid f\in F_{x_0}\} \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\mathrm{is}"] \arrow[dr, phantom, "\otimes"] & {[0,1]}/\{0,1\} \arrow[d, "\mathrm{is}"] \\
E \arrow[r, "\pi"] & B
\end{tikzcd}$$

In deze situatie kunnen we over <u>de</u> monodromie spreken.

<u>Def</u> Zij k een knoop in de S^3, k heet een <u>Neuwirth-Stallings</u> knoop als $S^3\setminus k$ de totale ruimte van een vezelbundel $(F, S^3\setminus k, \pi, S^1)$ is, waarin F een open samenhangend oppervlak is.

<u>opm.</u> Volgens stelling (11.1) zijn algebraische knopen Neuwirth-Stallings-knopen.

<u>Stelling</u> (II.3) Zij k een tamme knoop in de S^3, dan zijn de volgende voorwaarden equivalent:

(i) k is een Neuwirth-Stallings knoop

(ii) $[G,G]$ is een vrije groep, $G := \pi_1(S^3 \setminus k)$

(iii) $[G,G]$ is eindig voortgebracht.

<u>bew.</u> (K.2) (i) $\Rightarrow$ (ii) Voor een vezelbundel (F,E,π,B) is er een exacte rij: $\cdots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \xrightarrow{\delta} \pi_{i-1}(F) \to \cdots$,

$\pi_2(S^1) = (1)$ en $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^3 \setminus k) = G$, dus er is een exakte rij: $1 \to \pi_1(F) \to G \to \mathbb{Z} \to 0$, $G^{ab} \cong \mathbb{Z}$, dus $\pi_1(F) \cong [G,G]$, F is een open samenhangend oppervlak, dus $\pi_1(F)$ is een vrije groep, dus $[G,G]$ ook.

Zie voor het gehele bewijs:

Neuwirth, L.: "On Stallings fibration." Proc. Amer. Math. Soc. <u>14</u> (1963), 380-381.

Zij k een N-S knoop en $\varphi: (S^3 \setminus k) \to S^1$ een vezelbundel met vezel F, F een open samenhangend oppervlak, volgens (II.3) is $\pi_1(F) \cong [G,G]$ een eindig voortgebrachte vrije groep, zeg met μ voortbrengers. Zij $h: F \to F$ de monodromie van de vezelbundel, $h_*: \pi_1(F) \to \pi_1(F)$ is dan een groepsmorfisme $h_*: \langle x_1, \ldots, x_\mu \mid \ \rangle \to \langle x_1, \ldots, x_\mu \mid \ \rangle$; we geven $h_*(x_i)$ weer met $h(x_i)$ aan.

Het volgende diagram is commutatief:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times F / \{\{(0,p),(1,h(p))\} \mid p \in F\}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\otimes"] & {[0,1] / \{0,1\}} \arrow[d, "\cong"] \\
S^3 \setminus K \arrow[r, "\varphi"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Dus: $\pi_1(S^3 \setminus k) \cong \| x_1, \ldots, x_\mu, \eta \mid h(x_i) = \eta x_i \eta^{-1}, \ 1 \le i \le \mu \| \cdots (*)$.

$h_*^{ab}: \pi_1(F)^{ab} \to \pi_1(F)^{ab}$, $H_1(F) \cong \pi_1(F)^{ab}$, $H := h_*^{ab}: H_1(F) \to H_1(F)$ wordt de <u>algebraische monodromie</u> genoemd. $H: \mathbb{Z}^\mu \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^\mu$

$$\mathbb{Z}[F(x_1,\dots,x_\mu,\eta)] \xrightarrow{q} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{a} \mathbb{Z}[G^{ab}] \cong \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$$

$q(x_i) \in [G,G]$, dus $aq(x_i) = t^0 = 1$.

$aq(\eta) = t$

$\pi_1(F) \longrightarrow H_1(F)$

$x_i \longmapsto \bar{x}_i =: e_i$, H_{ij} de matrix van H t.o.v. de basis $e_1,\dots,e_\mu$.

Er geldt: $\left(H - tI \;\vdots\; \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right)$ is de Alexandermatrix van de presentatie (*).

Want: stel $h(x_i) = \prod_{t=1}^{n} x_{i_t}^{\alpha_t}$ dan is

$$H(e_i) = H(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \delta_{i_t j} \bar{x}_j = \sum_{j=1}^{\mu} \left(\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \delta_{i_t j}\right) e_j \quad \text{, dus } H_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \delta_{i_t j}$$

$$aq\left(\frac{\partial h(x_i)}{\partial x_j}\right) = aq\left(\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{x_{i_t}^{\alpha_t}-1}{x_{i_t}-1}\right)\delta_{i_t j}\right) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \delta_{i_t j} = H_{ij}$$

$$A_{ij} = aq\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(h(x_i)\eta x_i^{-1}\eta^{-1}\right)\right) = aq\left(\frac{\partial h(x_i)}{\partial x_j}\right) - t\delta_{ij} = H_{ij} - t\delta_{ij}$$

$$A_{i\mu+1} = aq\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left(h(x_i)\eta x_i^{-1}\eta^{-1}\right)\right) = 1 - 1 = 0$$

$\{A_{ij}\}_{\substack{1\le i\le \mu\\ 1\le j\le \mu+1}}$ is de Alexandermatrix van de presentatie (*)

en er geldt dus: $A = \left(H - tI \;\vdots\; \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right)$

Dus $E_i(K) = E_i(A) = E_{i-1}(H-tI)$ voor $i \geq 0$ $(E_{-1} := 0)$.

Hieruit volgt: $(\Delta_1(t)) = E_1(K) = E_0(H-tI) = (\det(H-tI))$.

$\det H = \pm 1$, dus $\det(H - 0\cdot I) = \pm 1$, dus $\Delta_1(t) = \pm\det(H-tI)$.

We hebben dus de volgende stelling bewezen:

<u>Stelling</u> (11.4) Het eerste Alexanderpolynoom $\Delta_1(t)$ van een N-S knoop is gelijk aan het karakteristieke polynoom van de algebraische monodromie $H: H_1(F) \to H_1(F)$, verder is $\mu :=$ rang $H_1(F) =$ graad $\Delta_1(t)$.

<u>opm.</u> K_7 met $\Delta_1(t) = 2 - 5t + 2t^2$ is geen N-S knoop (zie blz. 9-9, vb. 4)

anders zou $\Delta_1(0) = \pm\det(H - 0\cdot I) = \pm\det H = \pm 1$, maar $\Delta_1(0) = 2$.

<u>Def.</u> $H: \mathbb{Z}^\mu \to \mathbb{Z}^\mu$ een $\mathbb{Z}$-lineaire afbeelding, een <u>minimumpolynoom</u> van H is een polynoom $p(t) \in \mathbb{Z}[t]$ zdd $p(H) = 0$ en van de kleinste graad m.b.t. die eigenschap.

Volgens St. 15 in "Lectures in Abstract Algebra" II van Nathan Jacobson, Springer, GTM 31, blz 102, geldt voor een $\mu \times \mu$ matrix H met elementen in een $\mathbb{Z}$ en $p(t) := \det(H - tI)$, $\gamma(t) := \frac{p(t)}{\theta(t)}$

$(\theta(t)) = GGD\,(\mu-1) \times (\mu-1)$ minoren van $H - tI)$:

(i) $\gamma(H) = 0$ (ii) als $\psi \in \mathbb{Z}[t]$ en $\psi(H) = 0$ dan $\gamma(t) / \psi(t)$.

Maw $\gamma(t)$ is een minimum polynoom van H.

<u>Stelling</u> (11.5) (Crowell) $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ is een minimum polynoom van de algebraïsche monodromie H van een n-s knoop K, (Δ_1 en Δ_2 het eerste resp twee Alexander polynoom van K

<u>Bew.</u> (11.5) Volgens de definities in en blz. 11-4 is :

$$(\theta(t))\, \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = GGD\left(E_1\ (H - tI)\right) = GGD\ \left(E_2(A)\right) = (\Delta_2(t))\, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

$\Delta_2(t), \theta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ en $\Delta_2(0) > 0$ en $\theta(0) \neq 0$, dus

$\Delta_2(t) = \pm\ \theta(t)$, dus $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \pm \frac{p(t)}{\theta(t)} = \pm\, \gamma(t)$ is een minimum polynoom van H. ($p(t) = \det(H - tI) = \pm\, \Delta_1(t)$ volgens 11.4). ☒

<u>Gevolg</u> (11.6) (Lê Dũng Tráng)

De algebraïsche monodromie H van een algebraïsche knoop K heeft eindige orde.

<u>Bew.</u> (11.6) Volgens (10.7) is $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \prod_{d \in A} \Phi_d$ voor een algebraïsche knoop, zij $N := kgv(A)$, dan is $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \mid (t^N - 1)$.

volgens St. (11.5) is $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(H) = 0$, dus $H^N - 1 = 0$, dus $H^N = 1$, dus H heeft eindige orde, als H de algebraïsche monodromie van K is. ☒

<u>Opm.</u>

Gevolg (11.6) is een speciaal geval van het <u>vermoeden van Brieskorn.</u>

A'Campo heeft aangetoond dat het vermoeden iha onjuist is.

Brieskorn, E. : "Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen" Manuscripta Mathematicae, 2 (1970), 103-160

A'Campo, N : "Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes" Inventiones Math 20 (1973) 142-169.