TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op vrijdag 19 augustus 2011, 09:00-12:00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn de drie punten

$$P = (8, -5, -1),\ Q = (3, -1, 4) \text{ en } R = (-1, 1, 2).$$

Het vlak V gaat door P, Q en R.

a) Bepaal een parametervoorstelling voor V.

b) Ligt de oorsprong in het vlak V? Motiveer uw antwoord.

c) Het vlak W heeft vergelijking $3x + y - z = 4$. De snijlijn van V en W noemen we ℓ. Geef een parametervoorstelling voor ℓ.

2. Er is gegeven dat loodrechte spiegeling van de vector $\underline{p} = (2, 1, 1)$ in het vlak V de vector $\underline{p}' = (1, -1, -2)$ oplevert.

a) Verklaar waarom de verschilvector $\underline{p}-\underline{p}'$ een normaalvector van V is, en waarom $\frac{1}{2}(\underline{p}+\underline{p}')$ op V ligt.

b) Leid af dat $x + 2y + 3z = 0$ een vergelijking voor V is.

c) Bepaal een parametervoorstelling van de lijn die door spiegeling in V ontstaat uit de lijn door $(2, 1, 1)$ en $(5, 3, 1)$.

d) Bepaal een vergelijking van het vlak dat ontstaat door het vlak $W : x + 2z = 4$ te spiegelen in V.

3. Het oppervlak $\mathcal{S}$ heeft vergelijking $(z - 4)^2 = x^2 + y^2$ met $0 \leq z \leq 4$. Het punt $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ ligt op $\mathcal{S}$.

a) Geef een schets van het oppervlak $\mathcal{S}$ met daarop het punt P en duidelijk aangegeven coördinaatassen.

b) Ga na dat alle punten op het lijnstuk door P en $(0, 0, 4)$ gegeven door $\mathbf{x} = (0, 0, 4) + \lambda(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$ met $0 \leq \lambda \leq 2$ op $\mathcal{S}$ liggen.

c) Laat zien dat alle punten op dit lijnstuk hetzelfde raakvlak V: $x + y + \sqrt{2}\, z = 4\sqrt{2}$ aan $\mathcal{S}$ hebben.

d) Ga na dat V evenwijdig is aan de richting $\mathbf{r} = (0, \sqrt{2}, -1)$.

e) Zonlicht valt op $\mathcal{S}$ uit de richting $\mathbf{r}$. Op welk gedeelte van $\mathcal{S}$ valt zonlicht? Bepaal de grenslijnen van de schaduw die $\mathcal{S}$ werpt op de grond $z = 0$.

4. De parabool C in het x,z-vlak is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(s) = (s, 0, 1-s^2)$. In het vlak $y = 1$ ligt de parabool D met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (t, 1, t^2)$. Men construeert een regeloppervlak T als volgt: de rechten van T zijn evenwijdig met het y,z-vlak en snijden zowel C als D.

   a) Geef een schets van C, D en een van de genoemde rechten op T.

   b) Laat zien dat $z = 1 - x^2 + 2yx^2 - y$ een vergelijking is van T.

   c) Laat door berekening zien dat de punten van T waarin de kromming gelijk is aan 0 precies de rechte vormen gegeven door $z = 1 - y$ en $x = 0$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	2c:	3 punten	Vraagstuk	3d:	2 punten
	1b:	2 punten		2d:	3 punten		3e:	3 punten
	1c:	3 punten	Vraagstuk	3a:	2 punten	Vraagstuk	4a:	3 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		3b:	2 punten		4b:	4 punten
	2b:	2 punten		3c:	3 punten		4c:	3 punten

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en dan af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking voor het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$