Beknopte uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 19/08/2011
(Hieraan kunnen geen rechten ontleend worden.)

1a
$\underline{x} = \underline{p} + \lambda(\underline{q} - \underline{p}) + \mu(\underline{r} - \underline{p}) = (8, -5, -1) + \lambda[(3, -1, 4) - (8, -5, -1)] + \mu[(-1, 1, 2) - (8, -5, -1)]$.
Dit vereenvoudigt tot
$$\underline{x} = (8, -5, -1) + \lambda(-5, 4, 5) + \mu(-9, 6, 3).$$

1b
Los op $0 = 8 + 4\lambda - 9\mu$, $0 = -5 - 2\lambda + 6\mu$ en $0 = -1 + 2\lambda + 3\mu$. Dit heeft oplossing $\lambda = -1/2$, $\mu = 2/3$. Dus antwoord is 'ja'.
1c
Invullen parametervoorstelling in vergelijking:
$$3(8 + 4\lambda - 9\mu) + (-5 - 2\lambda + 6\mu) - (-1 + 2\lambda + 3\mu) = 4.$$
Dit levert $8\lambda - 24\mu = -16$, dus $\lambda = -2 + 3\mu$. Parametervoorstelling snijlijn ℓ is dus:
$$\underline{x} = (8 - 8 + 12\mu - 9\mu, -5 + 4 - 6\mu + 6\mu, -1 - 4 + 6\mu + 3\mu) = (3\mu, -1, -5 + 9\mu).$$
Herschreven: $\underline{x} = (0, -1, -5) + \mu(3, 0, 9)$.

2a
Bij loodrechte spiegeling staat de verbindingsvector van punt en spiegelbeeld loodrecht op de spiegel. Het midden van het lijnstuk tussen punt en spiegelbeeld ligt op de spiegel. De verbindingsvector $\underline{p} - \underline{p}'$ staat dus loodrecht op het vlak en $(\underline{p} - \underline{p}')/2$ ligt in het vlak.
2b
Normaalvector is $(2, 1, 1) - (1, -1, -2) = (1, 2, 3)$. Dus vergelijking is van de vorm $x + 2y + 3z = d$. Omdat $\frac{1}{2}((2, 1, 1) + (1, -1, -2))$ op het vlak ligt, vinden we: $d = 0$.
2c
We spiegelen $(5, 3, 1)$. Hiertoe bekijken we de lijn $\underline{x} = (5, 3, 1) + \lambda(1, 2, 3)$ en snijden met het spiegelvlak. Dit levert $\lambda = -1$. Voor de gespiegelde vinden we dus $\underline{q} = (5, 3, 1) - 2(1, 2, 3) = (3, -1, -5)$. Het spiegelbeeld van de lijn heeft dus parametervoorstelling
$$\underline{x} = \underline{p}' + \mu(\underline{q} - \underline{p}') = (1, -1, -2) + \mu(2, 0, -3).$$

2d
We spiegelen de normaalvector: snijd $\underline{x} = (1, 0, 2) + \lambda(1, 2, 3)$ met het spiegelvlak. Dit leidt tot $\lambda = -1/2$. Voor de gespiegelde nemen we $\lambda = -1$ en krijgen: $(1, 0, 2) - (1, 2, 3) = (0, -2, -1)$. De vergelijking wordt dus $-2y - z = d$. Omdat $\underline{p} = (2, 1, 1)$ in W ligt, ligt $\underline{p}' = (1, -1, -2)$ in $-2y - z = d$. Dus $d = 4$.

3b
We vullen $(\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{2}, 4 - 2\lambda)$ in in de vergelijking: het linkerlid wordt $(4 - 2\lambda - 4)^2 = 4\lambda^2$; het rechterlid wordt $(\lambda\sqrt{2})^2 + (\lambda\sqrt{2})^2 = 4\lambda^2$. Dus $(\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{2}, 4 - 2\lambda)$ voldoet aan de vergelijking. Voor $0 \leq \lambda \leq 2$ voldoet de z-coördinaat van $(\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{2}, 4 - 2\lambda)$ bovendien aan $0 \leq 4 - 2\lambda \leq 4$.
3c
De normaalvector halen we uit $(2x, 2y, -2(z - 4))$. In het punt $(\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{2}, 4 - 2\lambda)$ levert dit $(2\lambda\sqrt{2}, 2\lambda\sqrt{2}, -2(-2\lambda)$. We kunnen dus net zo goed nemen (deel door $2\lambda\sqrt{2}$): $(1, 1, \sqrt{2})$. We vinden dus
$$x + y + \sqrt{2}\, z = d.$$
En $d = \lambda\sqrt{2} + \lambda\sqrt{2} + \sqrt{2}(4 - 2\lambda) = 4\sqrt{2}$.
3d
Want $(0, \sqrt{2}, -1) \perp (1, 1, \sqrt{2})$.
3e
Het deel dat zon vangt wordt begrensd door de snijlijn van het raakvlak uit c), dus door $(\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{2}, 4-$

2λ). en de gespiegelde daarvan in het y, z-vlak, dus $(-\lambda\sqrt{2}, \lambda\sqrt{2}, 4-2\lambda)$. In het vlak $z=0$ zien we de grenslijnen $x+y=4\sqrt{2}$ (neem $z=0$ in de vergelijking van het raakvlak) en de gespiegelde $-x+y=4\sqrt{2}$.

4b

Parametervoorstelling van de regels

$$\underline{x} = (s, 0, 1-s^2) + \lambda[(s, 1, s^2) - (s, 0, 1-s^2)] = (s, 0, 1-s^2) + \lambda(0, 1, 2s^2-1).$$

Dus $x = s$, $y = \lambda$ en $z = 1 - s^2 + \lambda(2s^2 - 1)$. In de laatste gelijkheid kun je s door x vervangen en λ door y. Je vindt dan: $z = 1 - x^2 + y(2x^2 - 1) = 1 - x^2 + 2yx^2 - y$.

4c)

Met $f(x, y) = 1 - x^2 + 2yx^2 - y$ zie je snel dat $f_{yy} = 0$ in elk punt. Dus de teller van de kromming is $-f_{xy}^2 = -(4x)^2$. Deze teller is precies 0 als $x = 0$. Omdat de punten ook op het oppervlak liggen, vinden we $x = 0$ en $z = 1 - y$ (invullen in de vergelijking van T).