TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), dinsdag 14 augustus 2012, 09:00-12:00 uur.

Schrijf de uitwerkingen van de opgaven duidelijk geformuleerd en overzichtelijk op. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn het vlak $V : x + y + z = 3$ en de lijn $\ell : \mathbf{x} = (-4, 0, -2) + \lambda(2, 4, 3)$.

   a) Bepaal het snijpunt van ℓ met V.

   b) Er is precies één vlak door de oorsprong dat loodrecht staat op V en de lijn ℓ bevat. Bepaal een vergelijking van dit vlak.

   c) Laat zien dat $(2, 6, 4)$ het spiegelbeeld is van het punt $(-4, 0, -2)$ bij spiegeling in het vlak V.

   d) Bepaal het spiegelbeeld van de lijn ℓ bij spiegeling in het vlak V.

2. Het vlak V heeft vergelijking $x + 2y + 2z = 0$.

   a) Door translatie over de vector $\mathbf{t} = (3, 9, -3)$ gaat V over in het vlak W. Bepaal een vergelijking van W.

   b) Bepaal de afstand tussen V en W.

   c) Het vlak V wordt geroteerd om de z-as over $90°$. Bepaal een vergelijking van het resulterende vlak.

3. De kegel K heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 2z^2$ en het boloppervlak B heeft vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

   a) Schets in één figuur zowel de kegel als het boloppervlak.

   b) K en B snijden elkaar in twee cirkels. Bepaal van beide cirkels het middelpunt en de straal.

   c) Laat zien dat K en B elkaar loodrecht snijden in het punt $(2, 2, 2)$.

4. Gegeven zijn de rechte $\ell : x = 1, z = 0$ en de kromme $C : x = 0, z = y^2 + 1$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van S zijn evenwijdig met het x, z-vlak en snijden zowel ℓ als C.

   a) Geef een schets van ℓ en C en van een van de rechten op S.

   b) Laat zien dat $z = (1 - x)(y^2 + 1)$ een vergelijking is van S.

   c) Laat door berekening zien dat in elk punt van S de kromming negatief is.

5. In het vlak $z = 0$ ligt de cirkel $C : \mathbf{x}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$ en in het vlak $z = 1$ ligt de cirkel $C' : \mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$. Voor elke waarde van t trekken we een rechte lijn door de punten $(2\cos t, 2\sin t, 0)$ en $(\cos t, \sin t, 1)$. Het resulterende oppervlak noemen we S.

   a) Geef een schets van de twee cirkels en van enkele van de rechten.

   b) Bepaal een parametervoorstelling van het oppervlak S.

   c) Laat zien dat $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$ een vergelijking is van het oppervlak S. Wat voor type oppervlak betreft het?

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	2b:	3 punten	Vraagstuk	4a:	2 punten
	1b:	3 punten		2c:	2 punten		4b:	3 punten
	1c:	2 punten	Vraagstuk	3a:	2 punten		4c:	3 punten
	1d:	2 punten		3b:	3 punten	Vraagstuk	5a:	2 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		3c:	3 punten		5b:	3 punten
							5c:	3 punten

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, een eventueel bonuspunt daarbij op te tellen en dan af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$