TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), donderdag 15 augustus 2013, 09:00-12:00 uur.

Schrijf de uitwerkingen van de opgaven duidelijk geformuleerd en overzichtelijk op. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn de snijdende rechten ℓ: $\mathbf{x} = (0, 1, 2) + \lambda(2, 1, -2)$ en m: $\mathbf{x} = (2, -1, 3) + \mu(0, 1, -1)$.

    a) Bereken het snijpunt van ℓ en m.

    b) De rechten ℓ en m liggen in één vlak, V. Geef een parametervoorstelling van V.

    c) Laat zien dat $x + 2y + 2z = d$ een vergelijking is van V en bereken d.

    d) Bereken de hoek tussen ℓ en m.

2. U is het vlak met vergelijking $x + y + z = 6$.

    a) Leid een vergelijking af voor het vlak W dat ontstaat als U getransleerd wordt over $(2, 0, -5)$.

    b) Bepaal het snijpunt van de rechte $\ell : \mathbf{x} = (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ met U.

    c) Bepaal de afstand tussen de vlakken U en W.

3. Gegeven zijn de rechte ℓ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = \lambda(3, 2, 2)$ en het vlak V met vergelijking $x + 3y + z = 0$.

    a) Het punt $(3, 2, 2)$ wordt loodrecht gespiegeld in V. Bepaal dit spiegelbeeld van $(3, 2, 2)$. Bepaal ook een parametervoorstelling van de gespiegelde van ℓ bij loodrechte spiegeling in het vlak V.

    b) Bepaal een vergelijking van het vlak dat ℓ bevat en loodrecht staat op V.

4. K is de kegel met vergelijking $(y+3)^2 = 2x^2+2z^2$. Deze kegel heeft de y-as als symmetrieas.

   a) Schets K. Geef duidelijk de x-, y- en z-as in je tekening aan en de positie van de top van de kegel.

   b) Kegel K wordt geroteerd om de z-as over $\pi/2$ radialen in de positieve richting. Laat zien dat het resultaat de kegel L met vergelijking $(x-3)^2 = 2y^2 + 2z^2$ is.

   c) We snijden kegel K met het vlak $y = 1$. Bepaal aan de hand van een vergelijking of deze doorsnede een ellips, parabool of hyperbool is. Bepaal ook het type van de doorsnede van L met het vlak $y = 1$.

5. Het regeloppervlak S wordt als volgt geconstrueerd met behulp van twee cirkels C_1 en C_2. Cirkel C_1 ligt in het vlak $z = -1$ en heeft parametervoorstelling $\mathbf{x}(t) = (2\cos t, 2\sin t, -1)$. Cirkel C_2 ligt in het vlak $z = 1$ en heeft parametervoorstelling $\mathbf{x}(u) = (-2\sin u, 2\cos u, 1)$. Voor elke t is de rechte door $(2\cos t, 2\sin t, -1)$ van C_1 en $(-2\sin t, 2\cos t, 1)$ van C_2 een regel van het oppervlak.

   a) Schets beide cirkels en één van de regels. Geef duidelijk de coördinaatassen aan in je tekening.

   b) Bepaal een richtingsvector van de rechte (regel) door $(2\cos t, 2\sin t, -1)$. Wat is een parametervoorstelling van het oppervlak S?

   c) Laat zien dat de vergelijking $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ het regeloppervlak S beschrijft.

   d) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan S in het punt $(1, 3, 2)$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	2c:	3 punten	Vraagstuk	5a:	3 punten
	1b:	2 punten	Vraagstuk	3a:	4 punten		5b:	3 punten
	1c:	3 punten		3b:	3 punten		5c:	2 punten
	1d:	2 punten	Vraagstuk	4a:	3 punten		5d:	1 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		4b:	3 punten			
	2b:	2 punten		4c:	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:
  $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is
  $$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan
  $$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$