TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Beknopte uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 15/08/2013

Hieronder staan uitwerkingen van diverse onderdelen. Er is doorgaans maar één aanpak beschreven, ook als er meerdere mogelijkheden zijn. Aan de uitwerkingen kunnen geen rechten ontleend worden.

---

1. Gegeven zijn de snijdende rechten ℓ: $\mathbf{x} = (0,1,2) + \lambda(2,1,-2)$ en m: $\mathbf{x} = (2,-1,3) + \mu(0,1,-1)$.

   a) Bereken het snijpunt van ℓ en m.
   Uitwerking: We zoeken een λ en een μ waarvoor $(0,1,2) + \lambda(2,1,-2) = (2,-1,3) + \mu(0,1,-1)$. Dit levert de vergelijkingen (per coördinaat kijken) $2\lambda = 2$, $1+\lambda = -1+\mu$ en $2-2\lambda = 3-\mu$. Hieruit volgt $\lambda = 1$ en $\mu = 3$. Snijpunt: $(2,2,0)$.

   b) De rechten ℓ en m liggen in één vlak, V. Geef een parametervoorstelling van V.
   Uitwerking: Voor de hand liggende parametervoorstellingen zijn: $\mathbf{x} = (2,2,0) + \lambda(2,1,-2) + \mu(0,1,-1)$, $\mathbf{x} = (0,1,2) + \lambda(2,1,-2) + \mu(0,1,-1)$, $\mathbf{x} = (2,-1,3) + \lambda(2,1,-2) + \mu(0,1,-1)$.

   c) Laat zien dat $x + 2y + 2z = d$ een vergelijking is van V en bereken d.
   Uitwerking: De vector $(1,2,2)$ staat loodrecht op de richtingsvectoren van de rechten, dus is een normaalvector van het vlak. Om d te vinden: vul bijvoorbeeld $(0,1,2)$ in. Je vindt $d = 6$.

   d) Bereken de hoek tussen ℓ en m.
   Uitwerking: $(2,1,-2)\cdot(0,1,-1) = 3$, $|(2,1,-2)| = 3$ en $|(0,1,-1)| = sqrt(2)$, dus de cosinus van de hoek tussen de lijnen is $\dfrac{3}{3\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. De hoek is dus $\pi/4$.

2. U is het vlak met vergelijking $x + y + z = 6$.

   a) Leid een vergelijking af voor het vlak W dat ontstaat als U getransleerd wordt over $(2,0,-5)$.
   Uitwerking: Neem (x,y,z) op W. Dan ligt $(x-2, y, z+5)$ op U. Dus $(x-2)+y+(z+5) = 6$ ofwel $x+y+z = 3$.

   b) Bepaal het snijpunt van de rechte $\ell : \mathbf{x} = (2,1,0) + \lambda(1,1,1)$ met U.
   Uitwerking: Vul $(2+\lambda, 1+\lambda, \lambda)$ in in de vergelijking van U: $3 + 3\lambda = 6$. Dus $\lambda = 1$ en het snijpunt is $(3,2,1)$.

   c) Bepaal de afstand tussen de vlakken U en W.
   Uitwerking: Snijd de rechte ook met W: $(2,1,0)$ (voor $\lambda = 0$). Omdat de rechte loodrecht staat op U en W is de afstand tussen de vlakken gelijk aan de afstand tussen de snijpunten: $\sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$.

3. Gegeven zijn de rechte ℓ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = \lambda(3,2,2)$ en het vlak V met vergelijking $x + 3y + z = 0$.

a) Het punt $(3, 2, 2)$ wordt loodrecht gespiegeld in V. Bepaal dit spiegelbeeld van $(3, 2, 2)$. Bepaal ook een parametervoorstelling van de gespiegelde van ℓ bij loodrechte spiegeling in het vlak V.
Uitwerking: Snijd $(3, 2, 2) + \mu(1, 3, 1)$ met vlak: $3 + \mu + (6 + 9\mu) + (2 + \mu) = 0$ levert $\mu = -1$. Gespiegelde voor $\mu = -2$: $(1, -4, 0)$. Gespiegelde van $(3, 2, 2)$ is dus $(1, -4, 0)$. Omdat ℓ en V door de oorsprong gaan, is de gespiegelde van ℓ de rechte door de oorsprong en door $(1, -4, 0)$. Dus: $\mathbf{x} = \rho(1, -4, 0)$.

b) Bepaal een vergelijking van het vlak dat ℓ bevat en loodrecht staat op V.
Uitwerking: Een normaalvector van het gevraagde vlak staat loodrecht op de richtingsvector van ℓ en op $(1, 3, 1)$ (normaalvector van V). Bijvoorbeeld: $(-4, -1, 7)$ (kun je eventueel uitrekenen mbv het uitproduct). Vergelijking: $-4x - y + 7z = 0$ (vlak gaat door de oorsprong).

4. K is de kegel met vergelijking $(y+3)^2 = 2x^2+2z^2$. Deze kegel heeft de y-as als symmetrieas.

a) Schets K. Geef duidelijk de x-, y- en z-as in je tekening aan en de positie van de top van de kegel.

b) Kegel K wordt geroteerd om de z-as over $\pi/2$ radialen in de positieve richting. Laat zien dat het resultaat de kegel L met vergelijking $(x - 3)^2 = 2y^2 + 2z^2$ is.
Uitwerking: Neem (x, y, z) op L en roteer over $\pi/2$ in de negatieve richting: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$. Dus $(y, -x, z)$ ligt op K: $(-x + 3)^2 = 2y^2 + 2z^2$. Gebruik verder: $(-x + 3)^2 = (x - 3)^2$.

c) We snijden kegel K met het vlak $y = 1$. Bepaal aan de hand van een vergelijking of deze doorsnede een ellips, parabool of hyperbool is. Bepaal ook het type van de doorsnede van L met het vlak $y = 1$.
Uitwerking: De eerste doorsnede is een ellips (zelfs een cirkel), de tweede doorsnede is een hyperbool.

5. Het regeloppervlak S wordt als volgt geconstrueerd met behulp van twee cirkels C_1 en C_2. Cirkel C_1 ligt in het vlak $z = -1$ en heeft parametervoorstelling $\mathbf{x}(t) = (2\cos t, 2\sin t, -1)$. Cirkel C_2 ligt in het vlak $z = 1$ en heeft parametervoorstelling $\mathbf{x}(u) = (-2\sin u, 2\cos u, 1)$. Voor elke t is de rechte door $(2\cos t, 2\sin t, -1)$ van C_1 en $(-2\sin t, 2\cos t, 1)$ van C_2 een regel van het oppervlak.

a) Schets beide cirkels en één van de regels. Geef duidelijk de coördinaatassen aan in je tekening.

b) Bepaal een richtingsvector van de rechte (regel) door $(2\cos t, 2\sin t, -1)$. Wat is een parametervoorstelling van het oppervlak S?
Uitwerking: Een richtingsvector is: $(-2\sin t, 2\cos t, 1) - (2\cos t, 2\sin t, -1)$, dus $(-2\sin t - 2\cos t, 2\cos t - 2\sin t, 2)$.
Een parametervoorstelling van het oppervlak is dus $\mathbf{x} = (2\cos t, 2\sin t, -1) + \lambda(-2\sin t - 2\cos t, 2\cos t - 2\sin t, 2)$.

c) Laat zien dat de vergelijking $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ het regeloppervlak S beschrijft.
Vul $x = 2\cos t + \lambda(-2\sin t - 2\cos t)$, $y = 2\sin t + \lambda(2\cos t - 2\sin t)$, $z = -1 + \lambda 2$ in in de vergelijking. Na enig gereken zie je dat λ en t wegvallen.

d) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan S in het punt $(1, 3, 2)$.
Uitwerking: Neem $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 2$. Dan is $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ en $f_z = -4z$. In het aangegeven punt is een normaalvector van het raakvlak dus $(2, 6, -8)$. Een vergelijking is dus $2x + 6y - 8z = d$. Vul het punt $(1, 3, 2)$ in. Je vindt $d = 4$. Dus vergelijking vlak is $2x + 6y - 8z = 4$ (of $x + 3y - 4z = 2$).

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	2c:	3 punten	Vraagstuk	5a:	3 punten
	1b:	2 punten	Vraagstuk	3a:	4 punten		5b:	3 punten
	1c:	3 punten		3b:	3 punten		5c:	2 punten
	1d:	2 punten	Vraagstuk	4a:	3 punten		5d:	1 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		4b:	3 punten			
	2b:	2 punten		4c:	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$