**TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN**
Faculteit Wiskunde en Informatica

**Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 27 januari 2014, 09:00–12:00 uur**.

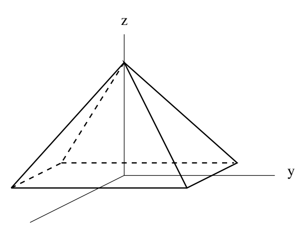
De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. De puntentelling vindt u aan het eind van het tentamen.

---

1. Gegeven zijn de rechten $\ell$: $\mathbf{x} = (0,1,0) + \lambda(2,-2,1)$ en $m$: $\mathbf{x} = (0,-2,3) + \mu(-2,-1,2)$.
   a) Laat met behulp van een berekening zien dat $\ell$ en $m$ elkaar snijden in $(2,-1,1)$.
   b) Toon aan dat de rechten $\ell$ en $m$ loodrecht op elkaar staan.
   c) Bepaal een vergelijking (van de vorm $ax + by + cz = d$) van het vlak $V$ dat $\ell$ en $m$ bevat.

2. Het vlak $V$ heeft vergelijking $x + 2y + 2z = 12$.
   a) Toon met behulp van een berekening aan dat de afstand van $(0,0,0)$ tot $V$ gelijk is aan 4.
   b) Er is nog een ander vlak $W$ dat parallel is met $V$ en dezelfde afstand tot $(0,0,0)$ heeft. Bepaal een vergelijking (van de vorm $ax + by + cz = d$) van $W$.
   c) Het boloppervlak met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ snijdt $V$ in een cirkel. Bepaal de straal van die cirkel.

3. De voorkant van de piramide uit het plaatje bevat (een deel van) de rechte $\mathbf{x} = (1,1,0) + \lambda(0,1,0)$ en gaat door het punt $(0,0,a)$ (met $a > 0$) op de $z$–as. We noemen het vlak waarin de voorkant ligt $V$.




   a) Bepaal een parametervoorstelling van dit zijvlak $V$ en laat zien dat $ax + z = a$ een vergelijking is van $V$.
   b) Het zijvlak $W$ aan de rechterkant ontstaat door roteren van $V$ om de $z$-as over $90°$ in positieve richting. Laat door rotatie van een normaalvector van $V$ zien dat dit zijvlak vergelijking $ay + z = a$ heeft.
   c) Voor welke waarde(n) van $a$ is de (scherpe) hoek tussen $V$ en $W$ gelijk aan $60°$?

Z.O.Z.

---

4. In het $y,z$-vlak ligt de rechte $\ell$ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = s(0,1,1)$. In het vlak $x = 1$ ligt de rechte $m$ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = (1,0,0) + t(0,1,-1)$. Men construeert een regeloppervlak $S$ als volgt: de rechten van het regeloppervlak zijn evenwijdig met het $x,z$-vlak en snijden zowel $\ell$ als $m$.

   a) Geef een schets van $\ell$, van $m$ en van enkele regels van $S$. (Geef duidelijk de coördinaatassen aan en teken de positieve $x$-as schuin naar 'voren', de positieve $y$-as naar 'rechts' en de positieve $z$-as naar 'boven'.)

   b) Waarom is $(1,0,-2s)$ een richtingsvector van de regel door het punt $(0,s,s)$? Geef een parametervoorstelling van de regel door het punt $(0,s,s)$.

   c) Laat zien dat $z = y - 2xy$ een vergelijking is van het regeloppervlak $S$.

   d) Laat door berekening zien dat de kromming in elk punt van $S$ negatief is. Bepaal het punt van het oppervlak waar de *absolute waarde* van de kromming maximaal is.

5. Gegeven is de rechte $\ell$ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = (0,0,4) + t(0,1,-1)$. Deze rechte wordt om de $z$-as geroteerd.

   a) Schets in een coördinatenstelsel het deel van het resulterende omwentelingsoppervlak dat ligt tussen $z = 0$ en $z = 4$. Geef in de tekening ook de plaats van (het overeenkomstige deel van) de rechte $\ell$ aan.

   b) Bepaal met behulp van een matrixvermenigvuldiging met de rotatiematrix

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   een parametervoorstelling van het omwentelingsoppervlak.

Zie volgende bladzijde

Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 27 januari 2014, 09:00–12:00 uur.

---

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vraagstuk | 1a: | 3 punten | Vraagstuk | 3a: | 4 punten | Vraagstuk | 4d: | 4 punten |
| | 1b: | 2 punten | | 3b: | 3 punten | Vraagstuk | 5a: | 3 punten |
| | 1c: | 2 punten | | 3c: | 3 punten | | 5b: | 2 punten |
| Vraagstuk | 2a: | 3 punten | Vraagstuk | 4a: | 3 punten | | | |
| | 2b: | 2 punten | | 4b: | 2 punten | | | |
| | 2c: | 2 punten | | 4c: | 2 punten | | | |

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

## Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de $z$–as over een hoek $\alpha$:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt $(x_0, y_0, z_0)$ aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te $(a, b)$)

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

- Het uitproduct van twee vectoren $(a_1, a_2, a_3)$ en $(b_1, b_2, b_3)$ is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$