TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 27 januari 2014, 09:00–12:00 uur.

Hieronder zijn van de meeste onderdelen uitwerkingen beschreven. Vaak zijn er meerdere oplossingsroutes denkbaar en soms kunnen antwoorden op meerdere manieren gegeven worden. Op die mogelijkheden wordt doorgaans niet ingegaan.

---

1. Gegeven zijn de rechten ℓ: $\mathbf{x} = (0, 1, 0) + \lambda(2, -2, 1)$ en m: $\mathbf{x} = (0, -2, 3) + \mu(-2, -1, 2)$.

   a) Laat met behulp van een berekening zien dat ℓ en m elkaar snijden in $(2, -1, 1)$.
   Antwoord. We onderzoeken de vergelijking $(0, 1, 0) + \lambda(2, -2, 1) = (0, -2, 3) + \mu(-2, -1, 2)$. Hieruit volgt $2\lambda = -2\mu$, $1 - 2\lambda = -2 - \mu$ en $\lambda = 3 + 2\mu$ met oplossing $\lambda = 1$ en $\mu = -1$. Het snijpunt vinden we dus door bijvoorbeeld $\lambda = 1$ te gebruiken: $(0, 1, 0) + 1 \cdot (2, -2, 1) = (2, -1, 1)$.

   b) Toon aan dat de rechten ℓ en m loodrecht op elkaar staan.
   Antwoord. Het inproduct van de richtingsvectoren is gelijk aan 0. Berekening: $(2, -2, 1) \bullet (-2, -1, 2) = 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$.

   c) Bepaal een vergelijking (van de vorm $ax + by + cz = d$) van het vlak V dat ℓ en m bevat.
   Antwoord. Normaalvector van het vlak haal je bijvoorbeeld uit het uitproduct van de richtingsvectoren. In ieder geval is $(1, 2, 2)$ een normaalvector. Een vergelijking van het vlak: $x + 2y + 2z = d$. De constante d bepaal je door een punt van het vlak in te vullen, bijvoorbeeld $(0, 1, 0)$. Je vindt $d = 2$. Dus $x + 2y + 2z = 2$.

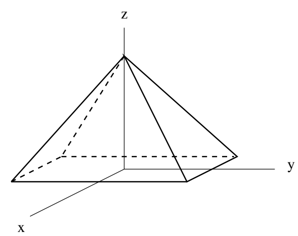
2. Het vlak V heeft vergelijking $x + 2y + 2z = 12$.

   a) Toon met behulp van een berekening aan dat de afstand van $(0, 0, 0)$ tot V gelijk is aan 4.
   Antwoord. Snijden met $\mathbf{x} = \lambda(1, 2, 2)$ (de rechte door $(0, 0, 0)$ en loodrecht op het vlak) levert voor λ de vergelijking $9\lambda = 12$ zodat $\lambda = 4/3$. Dus de afstand is $4/3 \cdot \parallel (1, 2, 2) \parallel = 4$.

   b) Er is nog een ander vlak W dat parallel is met V en dezelfde afstand tot $(0, 0, 0)$ heeft. Bepaal een vergelijking (van de vorm $ax + by + cz = d$) van W.
   Antwoord. Dat is het vlak met vergelijking $x + 2y + 2z = -12$. Dit vlak is parallel met V omdat de normaalvector gelijk is aan die van V. De afstand tot de oorsprong is ook 4: snijpunt met $\mathbf{x} = \lambda(1, 2, 2)$ krijg je voor $\lambda = -4/3$. De afstand van de oorsprong tot W is dus $|-4/3| \cdot \parallel (1, 2, 2) \parallel = 4$.

   c) Het boloppervlak met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ snijdt V in een cirkel. Bepaal de straal van die cirkel.
   Antwoord. De oorsprong O, het middelpunt van de cirkel C en een punt op de cirkel D vormen een rechthoekige driehoek met schuine zijde ter lengte 5 en een van de rechthoekszijden ter lengte 4 (maak een plaatje!). De straal van de cirkel is dus $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

3. De voorkant van de piramide uit het plaatje bevat (een deel van) de rechte $\mathbf{x} = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 0)$ en gaat door het punt $(0, 0, a)$ (met $a > 0$) op de z–as. We noemen het vlak waarin de voorkant ligt V.



a) Bepaal een parametervoorstelling van dit zijvlak V en laat zien dat $ax + z = a$ een vergelijking is van V.
Antwoord. Bijvoorbeeld: $V : \mathbf{x} = (1,1,0) + \lambda(0,1,0) + \mu[(0,0,a) - (1,1,0)]$, dus $V : \mathbf{x} = (1,1,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(-1,-1,a)$. De vector $(a,0,1)$ staat loodrecht op de twee gebruikte richtingsvectoren (ga zelf na) zodat een vergelijking van het vlak luidt: $ax + 0 \cdot y + z = d$. Door invullen van bijvoorbeeld $(1,1,0)$ vind je dat $d = a$.

b) Het zijvlak W aan de rechterkant ontstaat door roteren van V om de z-as over 90° in positieve richting. Laat door rotatie van een normaalvector van V zien dat dit zijvlak vergelijking $ay + z = a$ heeft.
Antwoord. Roteer de normaalvector met de matrix die een rotatie om de z-as beschrijft over 90°: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$. Dus vergelijking geroteerde vlak luidt $ay + z = f$. Omdat $(0,0,a)$ ook op het geroteerde vlak ligt vinden we $f = a$.

c) Voor welke waarde(n) van a is de (scherpe) hoek tussen V en W gelijk aan 60°?
Antwoord. Los op (gebruik $\cos 60^\circ = 1/2$)

$$\frac{1}{2} = \frac{(a,0,1) \bullet (0,a,1)}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+a^2}},$$

zodat $2 = 1 + a^2$ en $a^2 = 1$. Omdat $a > 0$ (gegeven) vinden we $a = 1$.

4. In het y,z-vlak ligt de rechte ℓ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = s(0,1,1)$. In het vlak $x = 1$ ligt de rechte m met parametervoorstelling $\mathbf{x} = (1,0,0) + t(0,1,-1)$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van het regeloppervlak zijn evenwijdig met het x,z-vlak en snijden zowel ℓ als m.

a) Geef een schets van ℓ, van m en van enkele regels van S. (Geef duidelijk de coördinaatassen aan en teken de positieve x-as schuin naar 'voren', de positieve y-as naar 'rechts' en de positieve z-as naar 'boven'.)

b) Waarom is $(1,0,-2s)$ een richtingsvector van de regel door het punt $(0,s,s)$? Geef een parametervoorstelling van de regel door het punt $(0,s,s)$.
Antwoord. De regel door $(0,s,s)$ gaat door het punt van m met dezelfde y-coördinaat, dus $(1,s,-s)$. Verschilvector is $(1,s,-s) - (0,s,s) = (1,0,-2s)$. Deze vector is een richtingsvector. Omdat $(0,s,s)$ een steunvector is vinden we bijvoorbeeld $\mathbf{x} = (0,s,s) + \lambda(1,0,-2s)$ als parametervoorstelling.

c) Laat zien dat $z = y - 2xy$ een vergelijking is van het regeloppervlak S.
Antwoord. Uit $x = \lambda$, $y = s$ en $z == s - 2\lambda s$ vinden we (vervang s en λ in de laatste gelijkheid): $z = y - 2xy$.

d) Laat door berekening zien dat de kromming in elk punt van S negatief is. Bepaal het punt van het oppervlak waar de *absolute waarde* van de kromming maximaal is.
Antwoord. Hier kunnen we de formule voor de kromming toepassen met $f(x,y) = y - 2xy$. De teller van de kromming: $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Nu is $f_{xx} = 0$ en $f_{xy} = -2$.

Dus teller wordt $-(-2)^2$, dwz -4. Aangezien de noemer altijd positief is, is de kromming negatief.
Voor de noemer hebben we $f_x = -2y$ en $f_y = 1 - 2x$ nodig. Kromming wordt dus

$$\frac{-4}{(1 + 4y^2 + (1 - 2x)^2)^2}.$$

De absolute waarde van de kromming, $\dfrac{4}{(1 + 4y^2 + (1 - 2x)^2)^2}$, is maximaal als de noemer minimaal is dus als $y = 0$ en $x = 1/2$. Dit levert het punt $(1/2, 0, 0)$.

5. Gegeven is de rechte ℓ met parametervoorstelling $\mathbf{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, -1)$. Deze rechte wordt om de z-as geroteerd.

   a) Schets in een coördinatenstelsel het deel van het resulterende omwentelingsoppervlak dat ligt tussen $z = 0$ en $z = 4$. Geef in de tekening ook de plaats van (het overeenkomstige deel van) de rechte ℓ aan.

   b) Bepaal met behulp van een matrixvermenigvuldiging met de rotatiematrix

   $$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   een parametervoorstelling van het omwentelingsoppervlak.
   Antwoord. $\mathbf{x}(t, u) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 4-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \sin u \\ t \cos u \\ 4-t \end{pmatrix}$

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	3 punten	Vraagstuk	3a:	4 punten	Vraagstuk	4d:	4 punten
	1b:	2 punten		3b:	3 punten	Vraagstuk	5a:	3 punten
	1c:	2 punten		3c:	3 punten		5b:	2 punten
Vraagstuk	2a:	3 punten	Vraagstuk	4a:	3 punten			
	2b:	2 punten		4b:	2 punten			
	2c:	2 punten		4c:	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

  $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

  $$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

  $$\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

  $$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$