TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op dinsdag 3 juli 2012, 09:00-12:00 uur.

Schrijf de uitwerkingen van de opgaven duidelijk geformuleerd en overzichtelijk op. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn de vlakken $V : y + z = 4$ en $W : -y + z = 4$.

   a) Schets in één figuur de vlakken V en W.

   b) Laat zien dat $\ell : \mathbf{x} = (0, 0, 4) + \lambda(1, 0, 0)$ de snijlijn is van V en W.

   c) Bepaal de hoek tussen V en W.

   d) Bepaal een vergelijking van het vlak U door $(0, 0, 4)$ dat loodrecht staat op V én op W.

2. Het vlak V heeft vergelijking $x + 2y + 2z = 12$.

   a) Door translatie over de vector $\mathbf{t} = (6, 18, -6)$ gaat V over in het vlak W. Bepaal een vergelijking van W.

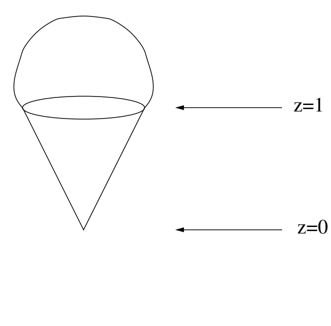
   b) Bepaal de afstand van $(0, 0, 0)$ tot V.

   c) Het vlak W wordt gespiegeld in V. Bepaal een vergelijking van het resulterende vlak.

3. De kegel K heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 2z^2$.

   a) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de kegel in het punt $(1, 1, 1)$.

   b) We bekijken het deel van de kegel tussen $z = 0$ en $z = 1$. Hierop plaatsen we een precies passende bolvormige koepel. De koepel bestaat uit een deel van een boloppervlak met vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ (de koepel is het deel met $z \geq 1$). Bepaal z_0 en r zó dat in elk punt van de snijkromme de kegel en het boloppervlak hetzelfde raakvlak hebben.



4. Gegeven zijn de rechten $\ell : x = 1,\ z = 0$ en $m : x = 0,\ z = y + 1$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van S zijn evenwijdig met het x, z-vlak en snijden zowel ℓ als m.

   a) Geef een schets van ℓ en m en van een van de rechten op S.

   b) Laat zien dat $z = (1 - x)(y + 1)$ een vergelijking is van S.

   c) Laat door berekening zien dat in elk punt van S de kromming negatief is.

5. In het vlak $z = 0$ ligt de cirkel $C : \mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Door elk punt van de cirkel trekken we een rechte met richtingsvector $(0, 2, 1)$.

   a) Geef een parametervoorstelling van de resulterende cilinder.

   b) Laat zien dat $x^2 + (y - 2z)^2 = 1$ een vergelijking is van de cilinder.

   c) We roteren de cilinder over $90°$ om de z-as in positieve richting. Bepaal een vergelijking van de resulterende cilinder.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	2b:	3 punten	Vraagstuk	4b:	3 punten
	1b:	2 punten		2c:	4 punten		4c:	3 punten
	1c:	2 punten	Vraagstuk	3a:	3 punten	Vraagstuk	5a:	2 punten
	1d:	2 punten		3b:	4 punten		5b:	3 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten	Vraagstuk	4a:	2 punten		5c:	3 punten

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, een eventueel bonuspunt daarbij op te tellen en dan af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x,y,z) = 0$ is

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x,y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a,b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a,b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$