Beknopte uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 03/07/2012
(Hieraan kunnen geen rechten ontleend worden.)

1b
Uit $-y+z=4$ en $y+z=4$ volgt (optellen) $2z=8$ en (aftrekken) $-2y=0$. Op x geen voorwaarde. Dus laat $x=\lambda$, verder $y=0$, $z=4$. Samen $\underline{x}=(\lambda,0,4)=(0,0,4)+\lambda(1,0,0)$.
1c
Hoek: hoek tussen normaalvectoren $(0,1,1)$ en $(0,-1,1)$. Omdat $(0,1,1)\bullet(0,-1,1)=0$ staan ze loodrecht op elkaar. Dus de vlakken maken een hoek van $90°$.
1d
De normaalvector van het gezochte vlak staat loodrecht op $(0,1,1)$ en $(0,1,-1)$. Dus bijvoorbeeld $(1,0,0)$ (kun je zo zien of via uitproduct vinden). Vlak is dus $x=d$. Omdat $(0,0,4)$ op vlak ligt: $d=0$, zodat $x=0$.

2a
Ligt (u,v,w) op W, dan $(u-6,v-18,w+6)$ op V, zodat $(u-6)+2(v-18)+2(w+6)=12$. Herschrijven: $u+2v+2w=42$. In termen van x,y,z (als je dat liever hebt): $x+2y+2z=42$.
2b
Afstand bepalen tussen $(0,0,0)$ en loodrechte projectie ervan op V. Snijden van $\underline{x}=\lambda(1,2,2)$ met V levert $\lambda=4/3$. Afstand is dus $4/3\cdot|(1,2,2)|=4$.
2c
In dit geval kun je de gespiegelde van W vinden door V juist over $-\underline{t}$ te transleren. Berekening als in a) levert $x+2y+2z=-18$. (Natuurlijk kun je ook echt een spiegeling uitvoeren, maar dat is in dit geval omslachtiger.)

3a
Schrijf de vergelijking als $x^2+y^2-2z^2=0$. Normaal in (u_0,v_0,w_0) is $(2u_0,2v_0,-4w_0)$. Te $(1,1,1)$ levert dat $(2,2,-4)$. Vergelijking: $x+y-2z=0$ (de nul vind je door $(1,1,1)$ in het linkerlid in te vullen).
3b
Raakvlakken in $(1,1,1)$ van kegel en bol vallen samen. Middelpunt bol is snijpunt van rechte door $(1,1,1)$ in de richting van de normaal met z-as: $\underline{x}=(1,1,1)+\lambda(1,1,-2)$ snijden met z-as levert $\lambda=-1$ en snijpunt $(0,0,3)$. Afstand tot $(1,1,1)$ is de straal: $\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$. Vergelijking bol: $x^2+y^2+(z-3)^2=6$.
(Ook kun je de normalen in het punt $(1,1,1)$ aan de kegel en aan de bol, berekend uit $x^2+y^2-2z^2=0$ en $x^2+y^2+(z-z_0)^2=r^2$, met elkaar vergelijken.)

4b
Punt $(1,t,0)$ op ℓ verbinden met $(0,t,t+1)$ op m levert $\underline{x}=(1,t,0)+\lambda(-1,0,t+1)$. Dus $x=1-\lambda$, $y=t$ en $z=\lambda(t+1)$. Uit $x=1-\lambda$ halen we $\lambda=1-x$. Verder kunnen we t door y vervangen zodat $z=\lambda(t+1)=(1-x)\cdot(y+1)$. Dus $z=(1-x)(y+1)$ is het eindresultaat.
4c
Gebruik $f(x,y)=(1-x)(y+1)$. S is de grafiek van f. Nu is $f_x=-y-1$, $f_y=1-x$, $f_{xx}=0$ en $f_{xy}=-1$. De teller van de formule voor de kromming wordt dus $0\cdot *-(-1)^2=-1$ en dat is negatief. Omdat de noemer altijd positief is, vinden we in elk punt van S een negatieve kromming.

5a
Door elk punt $(\cos t,\sin t,0)$ van de cirkel gaat een rechte met richtingsvector $(0,2,1)$. Dat wordt dus $\underline{x}(t,\lambda)=(\cos t,\sin t,0)+\lambda(0,2,1)$.
5b
Uit $x=\cos t$, $y=\sin t+2\lambda$ en $z=\lambda$ halen we $x^2+(y-2z)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$.
5c
Ligt (u,v,w) op resulterende cilinder, dan ligt (terugroteren over $90°$) $\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\-u\\w\end{pmatrix}$ op de originele cilinder en voldoet dus aan $v^2+(-u-2w)^2=1$. Ofwel $v^2+(u+2w)^2=1$. In termen van x,y,z (als je dat liever hebt): $y^2+(x+2z)^2=1$