TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), maandag 1 juli 2013, 09:00-12:00 uur.

Schrijf de uitwerkingen van de opgaven duidelijk geformuleerd en overzichtelijk op. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn de rechten ℓ: $\mathbf{x} = (0, 1, 0) + \lambda(2, -2, 1)$ en m: $\mathbf{x} = (1, 3, 2) + \mu(2, 1, -2)$.

   a) Laat met behulp van een berekening zien dat ℓ en m elkaar niet snijden.

   b) Toon aan dat de rechten ℓ en m loodrecht op elkaar staan.

   c) Bepaal een vergelijking (van de vorm $ax + by + cz = d$) van het vlak V dat ℓ bevat en loodrecht staat op m.

   d) Bepaal de afstand tussen ℓ en m.

2. Het vlak V heeft vergelijking $x + 2y + 2z = -12$.

   a) Door translatie over de vector $\mathbf{t} = (4, 4, 6)$ gaat V over in het vlak W. Bepaal een vergelijking van W.

   b) Een boloppervlak bevindt zich tussen de vlakken V en W en raakt aan beide vlakken. Er zijn vele mogelijkheden voor zo'n boloppervlak. Geef een voorbeeld van een vergelijking van een dergelijk boloppervlak en geef aan waarom uw keuze aan de voorwaarden voldoet.

3. Voor elke waarde van a beschrijft de vergelijking $(1 + a)x + y + z = 1$ een vlak V_a.

   a) Geef een schets van de vlakken $V_0 : x + y + z = 1$ en $W : x = 0$. Geef duidelijk de coördinaatassen aan.

   b) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn van de vlakken V_0 en W.

   c) Voor welke waarde(n) van a staan de vlakken V_0 en V_a loodrecht op elkaar?

4. K is de kegel met vergelijking $y^2 = 2x^2 + 2z^2$.

   a) Geef een schets (met duidelijk aangegeven coördinaatassen) van de doorsnede van K met het vlak $y = 2$, en van de kegel zelf.

   b) De kegel wordt geroteerd in positieve richting over $\pi/4$ radialen ($45°$) om de z-as. Het resultaat noemen we L. Laat zien dat $x^2 + y^2 + 6xy + 4z^2 = 0$ een vergelijking is van L.

   c) De doorsnede van L met het vlak $y = 1$ is een kwadratische kromme. Bepaal aan de hand van een vergelijking van deze doorsnede of het een parabool, een ellips of een hyperbool betreft.

5. In het y, z-vlak ligt de kromme P met parametervoorstelling $\mathbf{x}(s) = (0, s, s^3)$. In het vlak $x = 1$ ligt de rechte ℓ met parametervoorstelling $\mathbf{x}(t) = (1, t, -t)$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van het regeloppervlak verbinden steeds een punt van ℓ met een punt van P en zijn evenwijdig met het x, z-vlak.

   a) Bepaal een richtingsvector van de rechte op het oppervlak door het punt $(1, t, -t)$. Geef een parametervoorstelling van S.

   b) Laat zien dat $z = y^3 - xy^3 - xy$ een vergelijking is van het regeloppervlak S.

   c) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan S in het punt $(1, 1, -1)$.

   d) Bepaal de kromming van S in het punt $(0, 0, 0)$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	3a:	2 punten	Vraagstuk	5a:	3 punten
	1b:	2 punten		3b:	2 punten		5b:	2 punten
	1c:	2 punten		3c:	3 punten		5c:	3 punten
	1d:	4 punten	Vraagstuk	4a:	3 punten		5d:	2 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		4b:	3 punten			
	2b:	3 punten		4c:	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, een eventueel bonuspunt daarbij op te tellen en dan af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$