TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Beknopte uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 1-7-2013

Hieronder staan uitwerkingen van diverse onderdelen. Er is doorgaans maar één aanpak beschreven ofschoon er meerdere mogelijkheden zijn. Aan de uitwerkingen kunnen geen rechten ontleend worden.

---

1. Gegeven zijn de rechten ℓ: $\mathbf{x} = (0,1,0) + \lambda(2,-2,1)$ en m: $\mathbf{x} = (1,3,2) + \mu(2,1,-2)$.

   a) Laat met behulp van een berekening zien dat ℓ en m elkaar niet snijden.

   Uitwerking: Het is voldoende te laten zien dat er geen λ en μ zijn met $(0,1,0) + \lambda(2,-2,1) = (1,3,2)+\mu(2,1,-2)$. Uit $2\lambda = 1+2\mu$, $1-2\lambda = 3+\mu$ (1e en 2e coördinaat bekijken) volgt namelijk (optellen) $1 = 4 + 3\mu$, dus $\mu = -1$. Uit de vergelijkingen (2e en 3e coördinaat) $1 - 2\lambda = 3 + \mu$ en $\lambda = 2 - 2\mu$ volgt $1 = 7 - 3\mu$ zodat $\mu = 2$. Er is dus geen μ die aan alle drie de vergelijkingen voldoet (en over λ hoeven we ons dan al helemaal niet te bekommeren).

   b) Toon aan dat de rechten ℓ en m loodrecht op elkaar staan.

   Uitwerking: Het inproduct van de twee richtingsvectoren is gelijk aan 0, want: $(2,-2,1) \bullet (2,1,-2) = 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0$.

   c) Bepaal een vergelijking (van de vorm $ax + by + cz = d$) van het vlak V dat ℓ bevat en loodrecht staat op m.

   Uitwerking: Een normaalvector van dat vlak is $(2,1,-2)$ zodat een vergelijking is $2x + y - 2z = d$. Invullen van een punt van ℓ levert $d = 1$. Dus $V : 2x + y - 2z = 1$. Door invullen kun je zien dat elk punt van ℓ op V ligt.

   d) Bepaal de afstand tussen ℓ en m.

   Uitwerking: Hier zijn vele manieren voor. Dit is er één van. Neem willekeurige vectoren $(2\lambda, 1-2\lambda, \lambda)$ op ℓ en $(1+2\mu, 3+\mu, 2-2\mu)$ op m. Van het verschil $(1 + 2\mu - 2\lambda, 2 + \mu + 2\lambda, 2 - 2\mu - \lambda)$ eisen we dat deze loodrecht op ℓ en op m staat: ℓ: $2+4\mu-4\lambda-4-2\mu-4\lambda+2-2\mu-\lambda = 0$ en $2+4\mu-4\lambda+2+\mu+2\lambda-4+4\mu+2\lambda = 0$. Dus $\lambda = 0$ en $\mu = 0$. Dit levert $(0,1,0)$ op ℓ en $(1,3,2)$ op m. De afstand is dus $\sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2} = 3$.

2. Het vlak V heeft vergelijking $x + 2y + 2z = -12$.

   a) Door translatie over de vector $\mathbf{t} = (4,4,6)$ gaat V over in het vlak W. Bepaal een vergelijking van W.

   Uitwerking: Start met (u,v,w) op W en transleer terug: $(u-4, v-4, w-6)$ ligt dan op V. Dus $(u-4) + 2(v-4) + 2(w-6) = -12$. Hieruit $u + 2v + 2w = 12$.

   b) Een boloppervlak bevindt zich tussen de vlakken V en W en raakt aan beide vlakken. Er zijn vele mogelijkheden voor zo'n boloppervlak. Geef een voorbeeld van een vergelijking van een dergelijk boloppervlak en geef aan waarom uw keuze aan de voorwaarden voldoet.

Uitwerking: De straal van zo'n bol is de halve afstand tussen de vlakken. De afstand van $(0, 0, 0)$ tot beide vlakken is gelijk aan 4 zoals uit de volgende berekening volgt (je kunt ook rechtstreeks de afstand tussen de beide vlakken bepalen). Snijd $\lambda(1, 2, 2)$ met V. Dit levert $9\lambda = -12$ zodat $\lambda = -4/3$. De afstand tot V is dus $4/3 \cdot 3 = 4$. De afstand tot W volgt op soortgelijke wijze. De oorsprong is dus ook als middelpunt te nemen (maar er zijn vele mogelijkheden). Bol: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

3. Voor elke waarde van a beschrijft de vergelijking $(1 + a)x + y + z = 1$ een vlak V_a.

   a) Geef een schets van de vlakken $V_0 : x + y + z = 1$ en $W : x = 0$. Geef duidelijk de coördinaatassen aan.

   b) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn van de vlakken V_0 en W.
   Uitwerking: Uit $x = 0$ en $y + z = 1$ volgt (met $y = \lambda$): $\mathbf{x} = (0, \lambda, 1 - \lambda)$ ofwel $\mathbf{x} = (0, 0, 1) + \lambda(0, 1, -1)$.

   c) Voor welke waarde(n) van a staan de vlakken V_0 en V_a loodrecht op elkaar?
   Uitwerking: Het inproduct van de normaalvectoren moet gelijk zijn aan 0. We lossen dus op $(1 + a) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ zodat $a = -3$.

4. K is de kegel met vergelijking $y^2 = 2x^2 + 2z^2$.

   a) Geef een schets (met duidelijk aangegeven coördinaatassen) van de doorsnede van K met het vlak $y = 2$, en van de kegel zelf.
   Uitwerking: De kegel heeft top in $(0, 0, 0)$ en heeft de y-as als symmetrieas.

   b) De kegel wordt geroteerd in positieve richting over $\pi/4$ radialen $(45°)$ om de z-as. Het resultaat noemen we L. Laat zien dat $x^2 + y^2 + 6xy + 4z^2 = 0$ een vergelijking is van L.
   Uitwerking: Roteer (x, y, z) op L terug over $\pi/4$ radialen. Met behulp van de bijpassende rotatiematrix levert dit
   $$(\frac{1}{2}\sqrt{2}(x + y), \frac{1}{2}\sqrt{2}(-x + y), z).$$
   Dit punt voldoet aan de vergelijking van K zodat
   $$\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2.$$
   Hieruit volgt $x^2 + y^2 + 6xy + 4z^2 = 0$.

   c) De doorsnede van L met het vlak $y = 1$ is een kwadratische kromme. Bepaal aan de hand van een vergelijking van deze doorsnede of het een parabool, een ellips of een hyperbool betreft.
   Uitwerking: $x^2 + 1 - 6x + 4z^2 = 0$, dus $(x - 3)^2 + 4z^2 = 8$. Dus een ellips.

5. In het y, z-vlak ligt de kromme P met parametervoorstelling $\mathbf{x}(s) = (0, s, s^3)$. In het vlak $x = 1$ ligt de rechte ℓ met parametervoorstelling $\mathbf{x}(t) = (1, t, -t)$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van het regeloppervlak verbinden steeds een punt van ℓ met een punt van P en zijn evenwijdig met het x, z-vlak.

 zie volgende pagina

a) Bepaal een richtingsvector van de rechte op het oppervlak door het punt $(1, t, -t)$. Geef een parametervoorstelling van S.

Uitwerking: Richtingsvector is bijvoorbeeld $(0, t, t^3) - (1, t, -t) = (-1, 0, t^3 + t)$. Parametervoorstelling oppervlak: $\mathbf{x} = (1, t, -t) + \lambda(-1, 0, t^3 + t)$.

b) Laat zien dat $z = y^3 - xy^3 - xy$ een vergelijking is van het regeloppervlak S.

Uitwerking: Uit $x = 1 - \lambda$, $y = t$ en $z = -t + \lambda(t^3 + t)$ volgt $z = -y + (1 - x)(y^3 + y)$. Omdat $-y + (1 - x)(y^3 + y) = -y + y^3 + y - xy^3 - xy = y^3 - xy^3 - xy$ vinden $z = y^3 - xy^3 - xy$.

c) Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan S in het punt $(1, 1, -1)$.

Uitwerking: Ga uit van $F(x, y, z) = 0$ met $F(x, y, z) = y^3 - xy^3 - xy - z$ en gebruik de gradiënt $(-y^3 - y, 3y^2 - 3xy^2 - x, -1)$. Een normaal van het raakvlak is dus $(-2, -1, -1)$. Raakvlak heeft dus vergelijking $2x + y + z = d$. Omdat $(1, 1, -1)$ op het raakvlak ligt volgt $d = 2$ zodat het raakvlak is: $2x + y + z = 2$.

d) Bepaal de kromming van S in het punt $(0, 0, 0)$.

Uitwerking: Gebruik $z = f(x, y)$ met $f(x, y) = y^3 - xy^3 - xy$. Omdat $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -1$ en $f_x = f_y = 0$ levert invullen in de formule voor de kromming: -1.

z.o.z.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	3a:	2 punten	Vraagstuk	5a:	3 punten
	1b:	2 punten		3b:	2 punten		5b:	2 punten
	1c:	2 punten		3c:	3 punten		5c:	3 punten
	1d:	4 punten	Vraagstuk	4a:	3 punten		5d:	2 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		4b:	3 punten			
	2b:	3 punten		4c:	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, een eventueel bonuspunt daarbij op te tellen en dan af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$