TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op dinsdag 28 juni 2011, 14:00–17:00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn de rechte ℓ: $\mathbf{x} = (7, 4, -4) + \lambda(2, 1, -1)$ en het vlak V met vergelijking $x + 2y - 2z = 5$. Van het vlak W is gegeven dat het loodrecht staat op V en dat de rechte ℓ in W ligt.

   a) Bepaal het snijpunt van de rechte ℓ met het vlak V.

   b) Bepaal de loodrechte projectie van $(7, 4, -4)$ op V.

   c) Geef een parametervoorstelling van W. (Hint: de normaalvector van V is een richtingsvector van W.)

   d) Bepaal een vergelijking voor W.

2. Een van de vier opstaande zijvlakken van een piramide is de driehoek die bestaat uit het gedeelte in het eerste octant van het vlak V met vergelijking $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 10\sqrt{6}$. De andere opstaande zijvlakken ontstaan door deze driehoek over $90°$, $180°$ en $270°$ om de z-as te draaien.

   a) Bepaal de snijpunten van V met de drie coördinaatassen.

   b) Bepaal de oppervlakte van een opstaand zijvlak.

   c) Bepaal de hoek die een opstaand zijvlak maakt met het grondvlak $z = 0$.

   d) Bepaal een vergelijking voor het vlak dat ontstaat door draaiing van V over $270°$ om de z-as.

3. Gegeven zijn de lijnen ℓ: $\mathbf{x} = (0, 0, 1) + s(0, 1, 0)$ en m: $\mathbf{x} = t(1, 1, 0)$ en voor iedere u het vlak V_u met vergelijking $2x - y = u$. Het snijpunt van ℓ met V_u heet P_u en het snijpunt van m met V_u heet Q_u.

   a) Geef een schets met ℓ, m, V_2, P_2 en Q_2 (dus voor het geval $u = 2$).

   b) Bepaal P_u en Q_u uitgedrukt in u.

   c) De rechte die gaat door P_u en Q_u noemen we r_u. Leid af dat $\mathbf{x} = (u, u, 0) + \lambda(u, 2u, -1)$ een parametervoorstelling is van r_u.

   d) Leid af dat de rechten r_u een oppervlak $\mathcal{S}$ vormen met vergelijking $x(2z - 1) = y(z - 1)$.

   e) Laat zien dat in elk punt van $\mathcal{S}$ de kromming van $\mathcal{S}$ kleiner of gelijk aan 0 is. (Hint: schrijf x als functie van y en z.)

4. Het oppervlak $\mathcal{S}$ heeft vergelijking $x^2 + y^2 + z = 2$. Het punt $P = (a, b, c)$ ligt op $\mathcal{S}$.

   a) Geef een schets van $\mathcal{S}$.
   b) Laat zien dat het raakvlak door P aan $\mathcal{S}$ gegeven wordt door $2ax+2by+z = 2a^2+2b^2+c$.
   c) Laat zien dat $c = 1$ als dit raakvlak door het punt $T = (0, 0, 3)$ gaat.
   d) Bepaal de vergelijking van de kegel die gevormd wordt door de lijnen door T die raken aan $\mathcal{S}$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	2c :	2 punten	Vraagstuk	3e:	2 punten
	1b:	3 punten		2d :	3 punten	Vraagstuk	4a:	2 punten
	1c:	2 punten	Vraagstuk	3a :	2 punten		4b:	3 punten
	1d:	3 punten		3b :	2 punten		4c:	2 punten
Vraagstuk	2a:	2 punten		3c :	2 punten		4d:	3 punten
	2b:	3 punten		3d :	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen, het bonuspunt daar bij op te tellen en dan af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de x–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- De vergelijking voor het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) aan het oppervlak gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = 0$ is

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$