**Beknopte uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), 28/06/2011**
(Hieraan kunnen geen rechten ontleend worden.)

**1a**
Invullen van $(7+2\lambda, 4+\lambda, -4-\lambda)$ in de vergelijking van $V$ levert $\lambda = -3$ en vervolgens snijpunt $(1,1,-1)$.
**1b**
Snijd de lijn $\underline{x} = (7,4,-4) + \mu(1,2,-2)$ met $V$. Dit levert $\mu = -2$ en projectie $(5,0,0)$.
**1c**
$\underline{x} = (7,4,-4) + \lambda(2,1,-1) + \mu(1,2,-2)$.
**1d**
Gebruik c) en elimineer $\lambda$ en $\mu$ uit $x = 7+2\lambda+\mu$, $y = 4+\lambda+2\mu$ en $z = -4-\lambda-2\mu$. Dit levert $y+z=0$. Of bereken een normaalvector via het uitproduct van $(2,1,-1)$ en $(1,2,-2)$ enz.

**2a**
Met $x$-as: $(10\sqrt{2},0,0)$; met $y$-as: $(0,10\sqrt{2},0)$; met $z$-as: $(0,0,10\sqrt{3})$.
**2b**
Via Pythagoras: de basis heeft lengte 20. De hoogte is $\sqrt{100+300} = 20$. De oppervlakte is dus 200.
Ook te berekenen via het uitproduct.
**2c**
Dit komt neer op het berekenen van de hoek $\alpha$ tussen de normaalvectoren $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2})$ van $V$ en $(0,0,1)$ van het vlak $z=0$. Dit levert $\cos\alpha = 1/2$ zodat $\alpha = \pi/3$.
**2d**
Roteer de normaal $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2})$ met de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dit levert $(\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{2})$. De vergelijking wordt $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = d$. Omdat $(0,0,5\sqrt{3})$ zowel op $V$ als op het geroteerde vlak ligt vinden we: $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 10\sqrt{6}$.

**3b**
$P_u = (0,-u,1)$ en $Q_u = (u,u,0)$.
**3c**
Neem $(u,u,0)$ als steunvector en het verschil $(u,u,0)-(0,-u,1)$, dwz $(u,2u,-1)$, als richtingsvector.
**3d**
Uit $x = u+\lambda u$, $y = u+2\lambda u$ en $z = -\lambda$ halen we $\lambda = -z$ en $x = u(1-z)$ en $y = u(1-2z)$. Dus

$$x(2z-1) = u(1-z)(2z-1) = u(1-2z)(z-1) = y(z-1).$$

**3e**
Met $x = y\cdot(z-1)/(2z-1)$ vinden we voor $f(y,z) = y\cdot(z-1)/(2z-1)$ dat $f_{yy} = 0$ in elk punt. Dus

$$\frac{f_{yy}\cdot f_{zz} - f_{yz}^2}{(1+f_y^2+f_z^2)^2} = \frac{-f_{yz}^2}{(1+f_y^2+f_z^2)^2} \le 0.$$

**4b**
De normaal van het raakvlak te $(a,b,c)$ is $(2a,2b,1)$ (via de gradiënt), zie de formules. De vergelijking wordt $2ax+2by+z=d$. Invullen van $(a,b,c)$ levert $d = 2a^2+2b^2+c$.
**4c)**
Invullen van $T=(0,0,3)$ levert $3 = 2a^2+2b^2+c$. Omdat $P$ op $S$ ligt geldt ook $a^2+b^2+c=2$ zodat $2a^2+2b^2 = 4-2c$. Invullen in $3 = 2a^2+2b^2+c$ geeft $3 = 4-2c+c$ zodat $c=1$.
**4d)**
Deze kegel heeft vergelijking $4(x^2+y^2) = (z-3)^2$. Hier kun je bijvoorbeeld als volgt aan komen. Vanwege de $x,y$-symmetrie en het feit dat de top in $(0,0,3)$ ligt, is de vergelijking van de vorm $d(x^2+y^2) = (z-3)^2$. Zo'n raaklijn door $T$ ligt in een of ander raakvlak uit onderdeel c) en daar hoort een $z$-coördinaat 1 bij (van het raakpunt). Op hoogte 1 bestaat $S$ uit een cirkel met straal 1. Terwijl $(z-3)^2 = d(x^2+y^2)$ op hoogte 1 de kromme $4 = d(x^2+y^2)$ (en $z=1$) oplevert. Dus $d=4$.