Stelsels lineaire vergelijkingen

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven

In het vak *Meetkunde voor Bouwkunde* kom je stelsels lineaire vergelijkingen tegen en matrices tegen. Als je hier meer over wilt weten of wat extra wilt oefenen, is dit document een aanrader. Let op: dit document voert op het gebied van oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen verder dan gevraagd wordt voor het vak *Meetkunde voor Bouwkunde*.

1 Leerdoelen

In dit document maak je kennis met Gauss-eliminatie, een oplossingsmethode voor stelsels lineaire vergelijkingen. Na het bestuderen kun je

- stelsels lineaire vergelijkingen herkennen en in matrixvorm weergeven;
- matrices tot rijgereduceerde vorm vegen;
- De oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen bepalen door de coëfficiëntenmatrix tot rijgereduceerde vorm te vegen en aan de hand daarvan de oplossingen van het stelsel af te lezen;
- Oplossingen van stelsels in vectornotatie weergeven.

2 Waarom stelsels lineaire vergelijkingen?

In allerlei vakgebieden komen vergelijkingen voor, dat wil zeggen betrekkingen tussen variabelen, zoals $x^2 - e^y = \sin(y^3)$. Met wiskundige technieken probeer je dan aan oplossingen voor die betrekkingen te komen. Denk bijvoorbeeld aan chemische reacties: in welke verhouding worden waterstof en zuurstof verbruikt bij de reactie tot water? Concreter, de reactievergelijking

$$x\,H_2 + y\,O_2 \rightarrow z\,H_2O$$

voert tot de getallen $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ (althans, dat is de 'zuinigste' oplossing; $x = 4$, $y = 2$ en $z = 4$ leveren ook een oplossing), d.w.z. twee molekulen waterstof combineren met één molekuul zuurstof tot twee molekulen water. Aan deze oplossing kom je door uit de reactievergelijking twee (wiskundige) vergelijkingen te halen, en wel als volgt. Door de aantallen atomen waterstof links en rechts van de pijl in de reactievergelijking te vergelijken verschijnt de betrekking

$$2x = 2z.$$

Vergelijken van de aantallen atomen zuurstof levert de vergelijking

$$2y = z.$$

Twee vergelijkingen dus waaraan de drie variabelen x, y en z moeten voldoen. We lezen gemakkelijk af dat x en z in y zijn uit te drukken:

$$x = y \text{ en } z = 2y.$$

Bij elke keuze van y liggen x en z vervolgens vast; er zijn dus oneindig veel oplossingen. Uiteraard zijn voor de scheikunde alleen geheeltallige oplossingen relevant, en zelfs alleen de zuinige oplossing $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.

In de Bouwkunde gebruik je lineaire vergelijkingen om rechte lijnen en vlakken te beschrijven. Als je wilt weten welke punten tot twee vlakken behoren, moet je een stelsel oplossen. Bijvoorbeeld de twee lineaire vergelijkingen $x + y + z = 3$ en $2x - y + 3z = 10$.

Het zoeken naar oplossingsmethoden voor diverse soorten vergelijkingen is een onderdeel van de wiskunde. De complicaties die daarbij optreden liggen op de volgende terreinen:

- **Aantal variabelen, aantal vergelijkingen**. Er zijn talloze problemen, waarin niet één variabele of vergelijking, maar juist meerdere variabelen en vergelijkingen optreden. Bij grote aantallen is duidelijk dat de computer ingezet moet worden, maar de computerprogramma's moeten gebouwd worden op wiskundige inzichten.

- **De structuur van de vergelijking(en)**. Je hebt vergelijkingen die redelijk eenvoudig van structuur zijn, zoals $3x + 5 = 8$, maar ook vergelijkingen die ingewikkelder zijn:

  $$x^7 + 2x^6 - \pi x^5 + 3x^2 - x + 1 = 0, \ \sqrt{e^x} - 2\sin(xy) - \sqrt[4]{x^2 + y^2} = 0.$$

  In de wiskunde onderscheidt men diverse typen vergelijkingen. Voor diverse typen zijn oplossingsmethoden ontwikkeld en bijpassende software ontwikkeld. Net als bij andere wiskunde-onderdelen zijn er ten aanzien van vergelijkingen nog vragen waar wiskundigen het antwoord schuldig moeten blijven. Daar wordt onderzoek naar verricht.

In deze les bekijken we de situatie waarin er mogelijk meerdere vergelijkingen zijn ('stelsels') en meerdere variabelen, maar waarin elke vergelijking er relatief eenvoudig uitziet, namelijk lineair is. Dat laatste wil ruwweg zeggen dat de variabelen niet in wortels, e-machten en dergelijke verpakt zitten. De twee eenvoudige vergelijkingen die we uit de chemische reactie hebben gehaald, waren lineaire vergelijkingen.

Tot slot van deze inleiding een 'lineair' raadseltje: de leeftijden van Jan en zijn moeder Froukje zijn samen 71 jaar, terwijl Froukje vorig jaar twee keer zo oud was als Jan toen was. Hoe oud zijn Froukje en Jan?

Noem de leeftijd van Jan x, die van Froukje y, dan zegt het eerste gegeven dat $x + y = 71$, terwijl het tweede gegeven vertaalt in $y - 1 = 2(x - 1)$. We krijgen de twee vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 71 \\ 2x & - & y & = 1. \end{array}$$

Het is niet moeilijk hieruit af te leiden dat $x = 24$ en $y = 47$ (tel bijvoorbeeld de twee vergelijkingen op, je 'elimineert' dan de onbekende y). Grafisch is de oplossing in dit eenvoudige voorbeeld ook te bepalen. Beide vergelijkingen stellen immers een rechte in het x, y-vlak voor. Oplossen van het stelsel correspondeert met het vinden van het snijpunt van de twee rechten. Overigens zoeken we in dit probleem slechts geheeltallige oplossingen.

3 Wat is een stelsel lineaire vergelijkingen?

De vergelijking

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7$$

heet een *lineaire vergelijking* in de onbekenden x_1, x_2, x_3. De getallen $3, -4$, 5 en 7 heten de *coëfficiënten* van deze vergelijking; het getal 7 heet ook wel het *rechterlid*. Oplossen van deze vergelijking betekent het (systematisch) zoeken van alle waarden die de onbekenden x_1, x_2, x_3 kunnen aannemen als ze aan de genoemde betrekking voldoen. Eén van de oplossingen is $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. In feite heeft deze vergelijking oneindig veel oplossingen: voor elke keuze van het getal λ (de Griekse letter lambda) en het getal μ (de Griekse letter mu) is

$$x_1 = 2 + 4\lambda,\ x_2 = 1 + 3\lambda + 5\mu,\ x_3 = 1 + 4\mu$$

een oplossing. Dat ga je eenvoudig na door substitutie in de vergelijking:

$$3(2+4\lambda)-4(1+3\lambda+5\mu)+5(1+4\mu) = (6-4+5)+(12-12)\lambda+(-20+20)\mu = 7.$$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking is

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b,$$

waarin $x_1, \ldots, x_m$ de onbekenden zijn en $a_1, \ldots, a_m, b$ de (bekende) coëfficiënten; b is het rechterlid.

Als we eisen dat de onbekenden aan meerdere vergelijkingen dienen te voldoen, spreken we van een *stelsel lineaire vergelijkingen*. Hier is een voorbeeld van een stelsel bestaande uit twee lineaire vergelijkingen in drie onbekenden:

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & = 7 \\ 2x_1 & -3x_2 & -3x_3 & = 8 \end{array} \tag{1}$$

Een stelsel van n lineaire vergelijkingen in de m onbekenden x_1, $x_2, \ldots, x_m$ ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_{11} & x_1 + & a_{12} & x_2 & + & \ldots & + & a_{1m} & x_m & = b_1 \\ a_{21} & x_1 + & a_{22} & x_2 & + & \ldots & + & a_{2m} & x_m & = b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x_1 + & a_{n2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{nm} & x_m & = b_n \end{array} \tag{2}$$

We noemen de getallen a_{ij} en b_k de *coëfficiënten* van het stelsel. Doel is het beschrijven van een oplossingsmethode voor het oplossen van dergelijke stelsels lineaire vergelijkingen. Daarbij blijkt het handig te zijn het begrip matrix in te voeren. Voor we dat gaan doen, laten we eerst aan de hand van een voorbeeld zien wat je kunt verwachten.

4 Stelsels oplossen: eerste stappen en matrixnotatie

Om de oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen te vinden, gaan we enerzijds op systematische manier variabelen 'elimineren' en moeten we anderzijds beschrijven hoe we na deze operaties de oplossingen kunnen aflezen.

4.1 Voorbeeld. In het stelsel

$$\begin{array}{cccc} x & + & y & = 71 \\ 2x & - & y & = 1 \end{array}$$

kunnen we x uit de tweede vergelijking 'elimineren' door twee maal de eerste vergelijking van de tweede vergelijking af te trekken:

$$\begin{array}{cccc} x & + & y & = 71 \\ & - & 3y & = -141. \end{array}$$

Vervolgens kunnen we y uit de eerste vergelijking elimineren door de een-derde maal de (nieuwe) tweede vergelijking van de eerste af te trekken:

$$\begin{array}{rcrl} x & & & = 24 \\ & - & 3y & = -141. \end{array}$$

4.2 Voorbeeld. Aan de lineaire vergelijking $x+2y-3z = 5$ valt niets te vereenvoudigen. Om de mogelijke waarden van x, y en z te vinden, kunnen we aan y en z willekeurige waarden toewijzen. Vervolgens ligt dan de waarde van x vast. Als we voor y de waarde 7 kiezen en voor z de waarde 11, dan is $x = 5-2\cdot 7+3\cdot 11 = 24$. Algemeen: als we y de waarde λ en z de waarde μ geven, dan volgt $x = 5 - 2\lambda + 3\mu$. Dus de (oneindig vele) oplossingen van de vergelijking zijn:

$$\begin{array}{rl} x & = 5 - 2\lambda + 3\mu, \\ y & = \lambda, \\ z & = \mu \end{array}$$

met λ en μ willekeurige getallen. Uiteraard kunnen we ook eerst aan x en y een waarde toekennen. Dan ligt vervolgens z vast. Het past meer in de systematiek die we gaan bespreken om de eerste manier te volgen (de tweede manier is echter ook correct).

Om niet meteen te verdrinken in te grote stelsels en indices, bespreken we de oplossingsmethode eerst aan de hand van een voorbeeld. Tevens introduceren we dan de matrixnotatie. Daarna volgt een beschrijving van de algemene aanpak.

4.3 Voorbeeld. Drie vergelijkingen met drie onbekenden.
Het stelsel

$$\begin{array}{cccl} x & & & = 3 \\ & y & & = -2 \\ & & z & = 5 \end{array}$$

in de drie onbekenden x, y, z ziet er ideaal eenvoudig uit: de oplossing van dit stelsel is onmiddellijk af te lezen: $x = 3$, $y = -2$, $z = 5$. De reden is natuurlijk dat in elk van de drie vergelijkingen maar één variabele voorkomt. Door *elimineren van variabelen* proberen we ieder stelsel om te vormen tot een dergelijke gedaante. We illustreren dit procédé eerst aan de hand van het stelsel

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & - & z & = -1 \\ x & + & y & + & z & = 6 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = -18. \end{array}$$

De eerste drie stappen zijn erop gericht de variabele x uit twee van de drie vergelijkingen te elimineren.

1. Verwissel de eerste en de tweede vergelijking (het nut blijkt in de volgende twee stappen):

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ 2x & + & y & - & z & = -1 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = -18. \end{array}$$

2. Trek (in het nieuwe stelsel) twee keer de eerste vergelijking van de tweede vergelijking af. Dit resulteert in het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -y & - & 3z & = -13 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = -18. \end{array}$$

3. Trek drie keer de eerste vergelijking van de derde vergelijking af. Dit geeft:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & -y & - & 3z & = -13 \\ & & 3y & - & 6z & = 36. \end{array}$$

Het resultaat van de eerste drie stappen is dat x uit de tweede en derde vergelijking is geëlimineerd.

In de volgende stappen wordt de variabele y uit twee van de drie vergelijkingen geëlimineerd.

1. Vermenigvuldig de tweede vergelijking met -1 en deel de derde door 3:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 6 \\ & & y & + & 3z & = 13 \\ & & y & - & 2z & = -12. \end{array}$$

2. Trek vervolgens de tweede vergelijking één keer af van de eerste vergelijking en ook één keer van de derde vergelijking:

$$\begin{array}{rcrcrl} x & & & & -2z & = -7 \\ & & y & + & 3z & = 13 \\ & & & & -5z & = -25. \end{array}$$

Nu is de variabele y uit de eerste en uit de derde vergelijking verdwenen.

Ten slotte elimineren we z uit twee van de drie vergelijkingen.

1. Deel de derde vergelijking door -5:

$$\begin{array}{ccccc} x & & & 2z & = -7 \\ & y & + & 3z & = 13 \\ & & & z & = 5 \end{array}$$

   en trek vervolgens de nieuwe derde vergelijking drie maal af van de tweede vergelijking en tel de derde vergelijking twee maal op bij de eerste:

$$\begin{array}{cccc} x & & & = 3 \\ & y & & = -2 \\ & & z & = 5. \end{array}$$

   Hiermee zijn we aanbeland bij de ideale situatie.

De oplossing van dit stelsel is $x = 3$, $y = -2$, $z = 5$.

De drie soorten operaties met vergelijkingen.
Ieder van de boven uitgevoerde stappen valt in één van de volgende categorieën:

1. verwissel twee vergelijkingen;
2. tel een (eventueel negatief) veelvoud van een vergelijking op bij een andere vergelijking;
3. vermenigvuldig een vergelijking met een getal $\neq 0$ (merk op: 'delen' van een vergelijking door een getal $\neq 0$ valt hier ook onder).

Elk van deze operaties verandert een stelsel in een daarmee equivalent stelsel. In het bijzonder: door het uitvoeren van zulke operaties introduceren we geen nieuwe oplossingen en verliezen we evenmin oplossingen. Zie de opgaven voor nadere informatie over dit punt.

Matrixnotatie voor stelsels.
In de manipulaties die we in bovenstaand voorbeeld hebben uitgevoerd, veranderden steeds enkel coëfficiënten van de diverse vergelijkingen; de variabelen veranderden niet (in kwadraten, wortels of andere uitdrukkingen). Het is daarom overbodig steeds de variabelen en het =-teken op te schrijven: de *plaats* van elke coëfficiënt bevat de informatie over de variabele waarbij die coëfficiënt hoort (mits we de variabele niet van plaats veranderen). Vergelijk dit met het beschrijven van (positieve gehele) getallen in

het decimale stelsel: de plaats van elk cijfer bevat de informatie over de macht van 10 waarmee dat cijfer vermenigvuldigd moet worden. De '2' in 235 staat voor $2 \cdot 10^2$.

Om deze reden bekorten we onze schrijfwijze van een stelsel tot een getallenschema tussen haken waarin enkel het patroon van de coëfficiënten wordt opgenomen. In plaats van

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & - & z & = -1 \\ x & + & y & + & z & = 6 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = -18 \end{array}$$

schrijven we

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -18 \end{array}\right).$$

In de laatste schrijfwijze hebben we door een verticale streep een geheugensteuntje ingebouwd om ons eraan te herinneren dat de getallen rechts van de streep de getallen uit de rechterleden van de vergelijkingen zijn. Zo'n getallenschema heet een *matrix*. In ons voorbeeld is elke vergelijking vervangen door een *rij* van getallen. Er zijn dus drie rijen. In termen van dit getallenschema verloopt het eerste stuk van de berekening als volgt.

- Verwissel de eerste en de tweede rij:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -18 \end{array}\right).$$

- Trek de eerste rij (per coëfficiënt) twee maal af van de tweede rij:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -13 \\ 3 & 6 & -3 & -18 \end{array}\right).$$

- Trek de eerste rij (per coëfficiënt) drie maal af van de derde rij:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 3 & -6 & -36 \end{array}\right).$$

Het elimineren van de variabele x uit twee van de drie vergelijkingen wordt weerspiegeld door de twee nullen in de eerste *kolom* van de matrix. De rest van de berekening in termen van matrices slaan we over. We eindigen na het uitvoeren van alle stappen met

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Dit is dan het moment om weer terug te gaan naar vergelijkingen: de eerste rij staat voor de vergelijking $x = 3$, de tweede voor $y = -2$ en de derde voor $z = 5$. Dat wil zeggen, aan de hand van de laatste matrix is de oplossing van het stelsel meteen af te lezen.

De drie typen rijoperaties.
De drie typen manipulaties met vergelijkingen uit 4 hebben de volgende vertaling in operaties met de rijen van een matrix:

- verwissel twee rijen;
- tel een rij (per coëfficiënt) een aantal keren op bij een andere rij;
- vermenigvuldig elke coëfficiënt van een rij met een getal $\neq 0$.

Deze operaties noemen we *rijoperaties*.

4.4 (Matrix) We gaan nog even wat verder in op het begrip matrix. Een m bij n matrix A is een rechthoekig blok van mn getallen, de *elementen van de matrix*, die verdeeld zijn over m *rijen* en n *kolommen* (de rijen zijn van boven naar onder genummerd van 1 tot en met m, de kolommen zijn van links naar rechts genummerd van 1 tot en met n); elke rij bevat n getallen en elke kolom bevat m getallen. Het getal dat op het snijpunt van de i^{e} rij en j^{e} kolom staat wordt vaak aangegeven met A_{ij} en heet het *element op de plaats* i, j. Men schrijft wel $A = (A_{ij})$.

Hier is een voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In dit voorbeeld bestaat de matrix uit 2 *rijen* en 4 *kolommen*. De eerste rij bestaat uit de getallen 1, 0, 4, -2; de derde kolom uit de twee getallen 4 en 0. Ons voorbeeld is een 2×4 matrix.

De *coëfficiëntenmatrix* van het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

is de m bij n matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

De *uitgebreide coëfficiëntenmatrix* is de m bij $n+1$ matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Als alle rechterleden (de b_i's) gelijk zijn aan 0, dan spreken we van een *homogeen stelsel*. Bij een homogeen stelsel gebruiken we meestal alleen de coëfficiëntenmatrix. Een stelsel dat niet homogeen is heet *inhomogeen stelsel*.

5 Stelsels oplossen: rijreductie

5.1 We beschrijven nu de systematiek van het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. De methode die we bespreken heet wel *Gauss-eliminatie* naar de wiskundige C.F. Gauss (1777–1855). We beschrijven de methode in termen van de (uitgebreide) coëfficiëntenmatrix van het stelsel. De beschrijving bestaat uit twee delen:

- De zogenaamde *rijreductie* (*vegen*).
- Het aflezen van de oplossingen uit een matrix in *rijgereduceerde* vorm.

5.2 Omdat de algemene procedure rekening dient te houden met alle mogelijke situaties, komt de beschrijving wellicht enigszins gecompliceerd over. Om dit te ondervangen behandelen we simultaan een concrete situatie. Het betreft het stelsel

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 6 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & = -18 \end{array}$$

in de variabelen x_1, x_2, x_3, x_4 met uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & -3 & -18 \end{pmatrix}.$$

5.3 (Rijreductie, rijgereduceerde vorm) *Rijreductie* van een matrix bestaat uit het uitvoeren van de volgende manipulaties (let op: rijreductie passen we toe op een matrix; we gebruiken stelsels vergelijkingen als motivatie voor het gebruik van rijreductie).

- Zoek (van links af) de eerste kolom die *niet* uit louter nullen bestaat.Verwissel eventueel twee rijen zodat het eerste element in deze kolom niet 0 is. Deel de eerste rij door dat getal; er staat nu 1 bovenaan de kolom. (Variant in de praktijk: is één van de elementen in de kolom gelijk aan 1 verwissel rijen dan zo dat zo'n 1 bovenaan komt te staan; dit voorkomt het uitvoeren van een deling.)

  Voorbeeld: het betreft de eerste kolom; we verwisselen de eerste en de tweede rij omdat de tweede rij met een 1 begint:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 & -18 \end{pmatrix}.$$

- Trek vervolgens de eerste rij een aantal keren van de tweede rij af, een aantal keren van de derde rij af, etc., zodat de bewuste kolom bovenaan een 1 heeft staan en verder enkel nullen. We zeggen wel dat we de kolom met de eerste rij *schoonvegen*.

  Voorbeeld: Trek de eerste rij twee maal af van de tweede rij en drie maal van de derde rij:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -36 \end{pmatrix}.$$

- Zoek nu (zo mogelijk) de eerstvolgende kolom uit de matrix die op de plaatsen $2, 3, \ldots, m$ niet louter nullen heeft staan. Verwissel zo nodig twee van de rijen rij 2, rij 3, ..., rij m zodat de bewuste kolom op de tweede plaats niet 0 is. Deel de resulterende tweede rij door dit getal.

  Voorbeeld: Kolom 3 is de gezochte kolom. Verwisselen van rijen is niet nodig. Wel vermenigvuldigen we de tweede rij met -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -36 \end{pmatrix}.$$

- Veeg vervolgens met behulp van de tweede rij de kolom verder schoon.

  Voorbeeld: Trek de tweede rij af van de eerste rij en trek de tweede rij drie maal af van de derde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -75 \end{pmatrix}.$$

Dit proces herhalen we vervolgens (zo mogelijk) met de eerstvolgende kolom die op de plaatsen $3, 4, \ldots, m$ niet uit louter nullen bestaat, enz., enz. Het proces stopt als alle rijen zijn gebruikt of als de laatste rijen alleen uit nullen bestaan.

Voorbeeld: de eerstvolgende kolom is de vierde; we delen de derde rij door -15:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vervolgens tellen we twee keer de derde rij op bij de eerste en trekken drie maal de derde rij van de tweede af:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \end{pmatrix}.$$

Het proces stopt nu: alle rijen zijn verbruikt.

Na beëindiging van het proces voldoet de gevonden matrix aan de volgende condities:

- In elke rij is, van links af gezien, het eerste element $\neq 0$ gelijk aan 1. De kolom die deze 1 bevat bestaat verder uit enkel nullen. (In het voorbeeld zijn deze enen vetgedrukt weergegeven.)

- Elke rij die niet uit alleen maar nullen bestaat (een 'niet-nul rij') begint met meer nullen dan de voorafgaande rij. In het bijzonder staan rijen met enkel nullen ('nulrijen') onderaan. (In het voorbeeld is er niet zo'n rij.)

Een matrix die aan deze eisen voldoet heet een matrix in *rijgereduceerde vorm*. Het procédé om tot deze gedaante te komen heet *rijreductie* of ook wel *vegen*.

Voorbeeld: Het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen is omgevormd tot het stelsel

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} + 2x_2 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ \mathbf{x_3} \qquad &= -2 \\ \mathbf{x_4} &= 5. \end{aligned}$$

(De variabelen die bij de vetgedrukte enen horen zijn vetgedrukt.)

Van een stelsel waarvan de coëfficiëntenmatrix in rijgereduceerde vorm is, is het niet moeilijk de oplossingen af te lezen. Daaraan gaan we nu aandacht besteden.

5.4 (Oplossingen aflezen) Aan de rijgereduceerde vorm van de coëfficiëntenmatrix van een stelsel lezen we de oplossingen van het stelsel als volgt af.

(a) Komt er een rij voor die alleen op de laatste plaats een getal $\neq 0$ (en dus 1) heeft staan, dan is het stelsel *strijdig*, dat wil zeggen, het stelsel heeft geen oplossingen. Dit komt omdat deze rij correspondeert met de vergelijking

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = 1$$

die evident geen oplossingen heeft.

(b) Stel nu dat het vorige geval niet optreedt. In elke niet-nul rij is, van links af gezien, het eerste element $\neq 0$ gelijk aan 1. Dit is de coëfficiënt van één van de variabelen. Geef elke variabele die *niet* op deze manier voorkomt een willekeurige waarde. Door invullen van deze waarden in de vergelijkingen zijn nu de waarden van de andere variabelen te bepalen.

Voorbeeld: Er is geen rij die alleen op de laatste plaats een getal $\neq 0$ heeft staan; (a) is dus niet aan de orde. We kunnen daarom naar (b) toe. In elk van de drie rijen is, van links af gezien, het eerste element $\neq 0$ een 1. Hier horen de variabelen x_1, x_3, x_4 bij. De variabele x_2 komt niet voor bij een dergelijke coëfficiënt 1. We kennen er een willekeurige waarde, zeg λ, aan toe: $x_2 = \lambda$. Vervolgens lezen we af dat

$$x_1 = 3 - 2\lambda, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -5.$$

De oplossingen van het stelsel luiden dus:

$$x_1 = 3 - 2\lambda, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -5,$$

met λ willekeurig.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

de *coëfficiëntenmatrix* en de rij $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ heet *rechterlid*. Als de rij $\underline{b}$ de nulrij is dan heet het stelsel *homogeen*

5.5 (Oplossingen in vectornotatie) De oplossingen van een stelsel schrijven we meestal in 'vectornotatie'. Hiermee lopen we vooruit op een ander onderwerp uit *Lineaire algebra en lineaire analyse 1*: vectorrekening. We bedoelen het volgende. We nemen bijvoorbeeld de oplossingen uit het vorige stelsel

$$x_1 = 3 - 2\lambda, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -5.$$

Dit herschrijven we eerst als

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - 2\lambda, \lambda, -2, -5),$$

en vervolgens als

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, -2, -5) + \lambda(0, -2, 1, 0).$$

Voor een ingewijde in vectorrekening is nu meteen duidelijk dat de oplossingen een rechte lijn in een 4-dimensionale ruimte beschrijven.

Hier gebruiken we zoiets als een 'optelling' en een 'scalaire vermenigvuldiging' van vectoren:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$
$$\lambda\,(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

5.6 Voorbeeld. Schrijf de oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 6 \end{aligned}$$

in vectornotatie. Na vegen van de coëfficiëntenmatrix vinden we het stelsel

$$\begin{array}{cccl} x_1 & & +2x_3 & = 2 \\ & x_2 & -x_3 & = 2 \end{array}$$

We lezen hieraan af dat we aan x_3 vrij kunnen kiezen¡ bijvoorbeeld $x_3 = \lambda$. Dan is $x_2 = 2 + \lambda$ en $x_1 = 2 - 2\lambda$. We vinden

$$(x_1, x_2, x_3) = (2 - 2\lambda, 2 + \lambda, \lambda) = (2, 2, 0) + \lambda(-2, 1, 1).$$

5.7 Voorbeeld. De oplossingen van $x_1+x_2+x_3 = 1$ zijn $x_1 = 1-\lambda-\mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$. In vectornotatie:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu) = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1).$$

5.8 Opmerking. Een homogeen stelsel in de onbekenden $x_1, \ldots, x_m$ heeft altijd minimaal één oplossing, namelijk de 'nuloplossing', waarbij $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

Als je in een inhomogeen stelsel alle rechterleden vervangt door nullen, ontstaat een homogeen stelsel. Het is niet zo moeilijk om af te leiden (maar we doen het hier niet) dat de oplossingen van het inhomogene stelsel. veronderstel dat je één vaste oplossing van het inhomogene stelsel hebt (maar het doet er niet toe welke). Elke oplossing van het inhomogene stelsel is nu van de vorm: deze vaste oplossing plus een of andere oplossing van het homogene stelsel.

Bijvoorbeeld, voor de vergelijking $x_1 + x_2 = 5$ is $(5, 0)$ een oplossing. De oplossingen van de homogene vergelijking $x_1 + x_2 = 0$ zijn $\lambda(-1, 1)$. De oplossingen van $x_1 + x_2 = 5$ zijn dan $(5, 0) + \lambda(-1, 1)$.

6 Een toepassing en een meetkundige interpretatie

6.1 (Interpolatie) Gegeven de drie punten $(-2, 4)$, $(1, 7)$ en $(2, 12)$, bepaal een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarvan de grafiek door deze punten gaat. Dat wil zeggen, we proberen a, b, c te bepalen zó dat

$$f(-2) = 4, \quad f(1) = 7, \quad f(2) = 12.$$

Dit levert het volgende stelsel vergelijkingen in de onbekenden a, b, c (let op!):

$$\begin{array}{rcrcrl} 4a & - & 2b & + & c & = 4 \\ a & + & b & + & c & = 7 \\ 4a & + & 2b & + & c & = 12. \end{array}$$

Oplossen van dit stelsel geeft $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. De functie $f(x) = x^2 + 2x + 4$ is de (enige) kwadratische functie die de drie gegeven punten 'interpoleert'. Er is geen rechte lijn die door de drie punten gaat. Zo'n rechte zou van de vorm $ax + by = c$ zijn, waarbij a, b, c voldoen aan $-2a + 4b = c$, $a + 7b = c$ en $2a + 12b = c$ en niet alle drie gelijk zijn aan 0. Dit leidt tot het homogene stelsel met coëfficëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vegen tot rijgereduceerde vorm levert de 3 bij 3 eenheidsmatrix op:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit lezen we af dat de enige oplossing is $a = b = c = 0$, maar deze oplossing hoort niet bij een rechte lijn. Meetkundig is onmiddellijk duidelijk dat er geen rechte door de drie punten is.

6.2 (Meetkunde) In hetvervolg van de cursus wordt uitgebreid ingegaan op verbanden tussen meetkunde en stelsels lineaire vergelijkingen. Hier al vast een eerste indruk. De oplossingen van een lineaire vergelijking in twee onbekenden x, y vormen een rechte lijn in het x, y-vlak. In meetkundige termen komt het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen neer op het vinden van de punten die op *beide* rechten liggen. We vragen dus naar de snijpunten van de twee rechten. Op grond van deze meetkundige formulering is het duidelijk dat precies één van de volgende mogelijkheden optreedt bij een stelsel van twee vergelijkingen in twee onbekenden:

- het stelsel heeft geen oplossingen (twee verschillende rechten die parallel zijn);
- Het stelsel heeft precies één oplossing (twee verschillende lijnen, die niet parallel zijn);

- het stelsel heeft oneindig veel oplossingen (twee samenvallende rechten).

Een soortgelijke meetkundige interpretatie is mogelijk voor stelsels vergelijkingen in drie onbekenden. Een lineaire vergelijking in drie onbekenden correspondeert met een vlak in de ruimte. Het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen in drie onbekenden is derhalve de algebraïsche tegenhanger van het snijden van twee vlakken. Het oplossen van een stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden is de tegenhanger van het vinden van de doorsnijding van drie vlakken. Met deze meetkundige interpretatie kunnen we weer aangeven wat de mogelijkheden voor de oplossing(en) van diverse stelsels zijn.

Bijvoorbeeld voor een stelsel van twee vergelijkingen in drie onbekenden vinden we als mogelijkheden:

- er zijn geen oplossingen (twee verschillende parallelle vlakken);
- er zijn oneindig veel oplossingen, met één vrijheidsgraad (twee verschillende vlakken die elkaar in een rechte snijden);
- er zijn oneindig veel oplossingen, met twee vrijheidsgraden (twee samenvallende vlakken).

Een lijst van mogelijkheden voor het geval van een stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden is hieruit af te leiden door bovenstaande mogelijkheden te combineren met de oplossingen van een derde vergelijking.

6.3 (Meetkunde: heuristiek) Voortbordurend op bovenstaande meetkundige formulering kunnen we iets zeggen over wat we, kwalitatief, verwachten bij het oplossen van een stelsel. De gedachte daarbij illustreren we aan de hand van het volgende voorbeeld.

Bij een stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden 'verwachten' we precies één oplossing: twee vlakken snijden elkaar in het algemeen in een rechte en het derde vlak snijdt in het algemeen op deze rechte precies één punt uit. In bijzondere gevallen kan het anders uitpakken, bijvoorbeeld als de eerste twee vlakken parallel zijn. Vandaar de subtiele toevoeging 'in het algemeen'.

Op soortgelijke gronden 'verwacht' je bij een stelsel van vier vergelijkingen in drie onbekenden geen oplossingen *tenzij* de vier bijbehorende vlakken in een speciale positie ten opzichte van elkaar liggen. Hier is de gedachtengang: bij drie van de vier vergelijkingen/vlakken verwacht je precies één snijpunt zoals we boven beredeneerden. In het algemeen zal het vierde vlak niet door dit punt gaan, dus verwachten we geen oplossingen voor het stelsel.

7 Samenvatting

7.1 In dit hoofdstuk hebben we het oplossen van stelsels vergelijkingen besproken. In grote lijnen kwamen aan de orde:

- Het beschrijven van een stelsel vergelijkingen in termen van matrices.
- Het oplossen van homogene en inhomogene stelsels via rijreductie van de (uitgebreide) coëfficiëntenmatrix (Gauss-eliminatie). In het bijzonder:
  - het vegen van een matrix tot rijgereduceerde vorm;
  - het bepalen van de variabelen waaraan vrij een waarde toegekend kan worden;
  - het uitmaken of een stelsel al dan niet strijdig is;
  - het beschrijven van de oplossingen in vectornotatie.

8 Begrippenlijst

- lineaire vergelijking, stelsel lineaire vergelijkingen, homogeen stelsel en inhomogeen stelsel
- coëfficiënten van een vergelijking/stelsel, rechterlid van een stelsel
- coëfficiëntenmatrix en uitgebreide coëfficiëntenmatrix van een stelsel vergelijkingen; matrixnotatie voor een stelsel
- de drie rijoperaties: rijen verwisselen, een rij met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigen, een veelvoud van een rij bij een andere rij optellen;
- matrix; vegen van een matrix naar rijgereduceerde vorm
- oplossen van een stelsel door vegen (eliminatie van variabelen); strijdig stelsel; niet-strijdig stelsel
- vrije parameters; aantal oplossingen van een stelsel; oplossingen van een stelsel in vectornotatie
- matrix $A = (a_{ij})$; elementen of coëfficiënten van een matrix; rijen en kolommen; m bij n matrix

9 Aantekeningen

De term "matrix" is afkomstig van James Joseph Sylvester (1814–1897). Hij gaf aan de oorspronkelijke betekenis van het Latijnse woord matrix – een voor fokken bestemd moederdier – een opmerkelijke interpretatie. Hij schrijft hierover in de Philosophical Magazine van 1851: "I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent". Determinanten zijn hier niet besproken.

Matrices worden gebruikt om getallen (soms ook andere objecten) in op te slaan; in dit document hebben we de coëfficiënten van een stelsel vergelijkingen in matrixvorm opgeschreven, maar er zijn ook geheel andere toepassingen. Het belang van matrices ligt daarin dat de bewerkingen met matrices (optellen, vermenigvuldigen, met rijen en kolommen exerceren, deze bewerkingen hebben we niet besproken) het mogelijk maken de in een matrix opgeslagen gegevens handig te manipuleren en te bewerken.

Lineaire vergelijkingen zijn in zekere zin de eenvoudigste vergelijkingen die in de wiskunde voorkomen; het is een van de weinige typen vergelijkingen waarvoor een volledige oplossingsprocedure bestaat. Toch is deze oplossingsprocedure (Gauss–eliminatie) niet het einde van het verhaal: problemen van een andere soort treden op als het aantal vergelijkingen groot wordt en/of de coëfficiënten erg groot of erg klein in absolute waarde worden. Problemen van dit soort vragen om een 'numerieke benadering'.

Gauss-eliminatie is een algoritme. Implementaties zijn in allerlei software terug te vinden, o.a. in het softwarepakket Maple.

10 Opgaven

1 Het volgende stelsel vergelijkingen is niet lineair:

$$\begin{array}{ccccl} e^x & + & e^y & = 5 \\ e^x & - & e^y & = 3. \end{array}$$

Laat zien dat via een tussenstap in dit stelsel toch een lineair stelsel verborgen zit. Los het lineaire en het oorspronkelijke stelsel op.

2 Van welk stelsel is

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de coëfficiëntenmatrix?

3 Vergeet niet bij de volgende vragen je antwoord te beargumenteren.

a. Aan een strijdig stelsel wordt nog een lineaire vergelijking toegevoegd. Wat kun je zeggen over de oplossingen van dit nieuwe stelsel? Geef een voorbeeld.

b. De oplossingen van een stelsel bevatten één vrije parameter. Nu wordt er één lineaire vergelijking (in dezelfde variabelen) toegevoegd. Welke mogelijkheden zijn er voor het aantal vrije parameters in het nieuwe stelsel. Geef een voorbeeld van elk van de twee situaties.

4 Breng door vegen de volgende matrices in rijgereduceerde vorm:

a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -11 \\ 2 & 5 & -5 & -11 \\ -1 & -1 & 7 & 43 \end{pmatrix},$$

b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

5 Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op:

a.

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0, \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 0, \\ 4x_1 & +6x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 0; \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{lllll} 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0, \\ 5x_1 & +5x_2 & +4x_3 & -5x_4 & = 0, \\ 2x_1 & +9x_2 & +3x_3 & -9x_4 & = 0; \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 2, \\ 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -x_4 & = 3, \\ x_1 & & -x_3 & +7x_4 & = 3. \end{array}$$

6 Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op:

a.

$$\begin{array}{rrrl} & x_2 & +2x_3 & = 1, \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 2, \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3; \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = 1, \\ 2x_1 & +4x_2 & & & -8x_5 & = 3, \\ & -2x_2 & +4x_3 & +6x_4 & +4x_5 & = 0; \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & & = 0, \\ x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = 4, \\ 2x_1 & & +4x_3 & = -8, \\ 3x_1 & & +6x_3 & = -12, \\ -2x_1 & -8x_2 & +4x_3 & = -8; \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0, \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = 0, \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = 0, \\ 6x_1 & -x_2 & -5x_3 & = 0, \\ 7x_1 & -3x_2 & -4x_3 & = 1. \end{array}$$

7 Bepaal voor elke λ de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rrrl} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2, \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = 3. \end{array}$$

8 In de tekst is zonder bewijs gebruik gemaakt van het feit dat je door de rijoperaties geen oplossingen toevoegt of kwijtraakt.

a. Het is uiteraard duidelijk dat de oplossingen niet veranderen als we de volgorde van de vergelijkingen veranderen. Toon aan dat de oplossingen van een enkele vergelijking niet veranderen als we de vergelijking met een getal $\alpha \neq 0$ vermenigvuldigen.

b. Bekijk twee vergelijkingen, die we v en w noemen. Laat zien dat het stelsel v, w dezelfde oplossingen heeft als het stelsel v, $v + \beta w$.

c. Door kwadrateren kun je wel eens oplossingen kwijtraken. Laat dit aan de hand van een voorbeeld zien (je hoeft geen lineaire vergelijking(en) te kiezen).

9 Hoeveel kwadratische functies (functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$) zijn er waarvan de grafiek door de punten $(1,1)$ en $(2,1)$ gaat? Bepaal al deze functies en schets enkele van de bijbehorende grafieken.

10 Los voor elke waarde van λ het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & -2x_3 & = & \lambda+4, \\ -2x_1 & +\lambda x_2 & +7x_3 & = & -14, \\ -x_1 & +\lambda x_2 & +6x_3 & = & \lambda-12. \end{array}$$

11 Los voor elke waarde van λ het volgende stelsel lineaire vergelijkingen op:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -6x_4 & = & -1, \\ 2x_1 & +x_2 & & +9x_4 & = & 2+\lambda, \\ -3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & = & 1+\lambda. \end{array}$$

11 Beknopte antwoorden

1 Stel $u = e^x$ en $v = e^y$. Los eerst het stelsel $u + v = 5$, $u - v = 3$ op: $u = 4$ en $v = 1$. Vervolgens is dan $x = \ln(4)$, $y = 0$.

2 Van het stelsel

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 0 \\ 5x_1 & -4x_2 & +2x_3 & = 1. \end{array}$$

3

(a) Als je aan een strijdig stelsel een vergelijking toevoegt, blijft het stelsel strijdig: een oplossing van het nieuwe grotere stelsel is namelijk in het bijzonder een oplossing van het oude stelsel. Voorbeeld: $x = 0$, $x = 1$ is strijdig. Voeg er aan toe: $x + y = 3$.

(b) Mogelijkheden:

(*) nog steeds één vrije parameter. Voorbeeld: $x + y = 2$; we voegen toe $2x + 2y = 4$.

(*) nul vrije parameters. Bijvoorbeeld, voeg aan $x + y = 6$ toe de vergelijking $2x - y = 12$.

4 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5 a) $\underline{x} = \lambda(17, -13, 4, 3)$
b) $\underline{x} = \lambda(3, 1, -5, 0) + \mu(0, 1, 0, 1)$
c) $\underline{x} = (3, 1, 0, 0) + \lambda(1, 2, 1, 0) + \mu(7, 5, 0, -1)$

6 a) $\underline{x} = (1, -1, 1)$
b) geen oplossingen
c) $\underline{x} = (0, 0, -2) + \lambda(-2, 1, 1)$
d) geen oplossingen

7 $\lambda = 1$: strijdig; $\lambda \neq 1$: $(\frac{1}{1-\lambda}, 0, 3 - \frac{1}{1-\lambda}) + \mu(1, 1, -\lambda - 1)$

8 a. Als $p_1, p_2, \ldots, p_m$ een oplossing is van $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = b$, d.w.z. $a_1p_1 + \cdots + a_mp_m = b$, dan is $p_1, \ldots, p_m$ ook een oplossing van de vergelijking $\alpha a_1x_1 + \alpha a_2x_2 + \cdots + \alpha a_mx_m = \alpha b$:

$$\alpha a_1p_1 + \cdots + \alpha a_mp_m = \alpha(a_1p_1 + \cdots + a_mp_m) = \alpha b.$$

Uiteraard geldt om een soortgelijke reden het omgekeerde: als

$$p_1, p_2, \ldots, p_m$$

een oplossing is van $\alpha a_1x_1 + \alpha a_2x_2 + \cdots + \alpha a_mx_m = \alpha b$, dan is $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ook een oplossing van $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = b$. Dit volgt uit

$$\begin{aligned} a_1p_1 + \cdots + a_mp_m &= \tfrac{1}{\alpha} \cdot \alpha(a_1p_1 + \cdots + a_mp_m) \\ &= \tfrac{1}{\alpha}(\alpha a_1p_1 + \cdots + \alpha a_mp_m) \\ &= \tfrac{1}{\alpha}\alpha b = b. \end{aligned}$$

c. Bijvoorbeeld: $x^2 = -1$ heeft geen (reële) oplossingen, maar de vergelijking $(x^2)^2 = (-1)^2$ wel.

9 Oneindig veel.

10 Voor $\lambda \neq 0$: $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, 2, -2)$; voor $\lambda = 0$: $x_1 = 0$, $x_3 = -2$, $x_2 = \mu$ (vrij)

11 $\lambda \neq -1$: strijdig stelsel; voor $\lambda = -1$: $(1, -1, 0, 0) + \alpha(1, -2, 1, 0) + \beta(-8, 7, 0, 1)$