TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op maandag 23 augustus 2010, 14:00–17:00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de rechte ℓ: $\underline{x} = (1,0,3)+\lambda(1,-2,2)$ en het vlak $V : x-2y+2z = -2$.

   a) Bepaal het snijpunt P van ℓ en V.

   b) Bepaal een vergelijking van het vlak dat ℓ en de oorsprong bevat.

   c) Het vlak V snijdt het x,y-vlak in een rechte. Bepaal een parametervoorstelling van deze rechte.

2. In de ruimte is gegeven het vlak V met vergelijking $x + y + z = 18$.

   a) Bereken de afstand van $(0,0,0)$ tot het vlak V.

   b) Voor welke waarde(n) van a is de scherpe hoek tussen V en het vlak met vergelijking $x - y + az = a$ gelijk aan $60°$?

   c) Het vlak met vergelijking $x - y + az = a$ snijdt de x-as, y-as en z-as in achtereenvolgens A, B en C. Voor welke waarde(n) van a is $|AC| = \sqrt{2} \cdot |AB|$?

3. Gegeven zijn de rechte ℓ met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(3,2,2)$ en het vlak V met vergelijking $x + 3y + z = 0$.

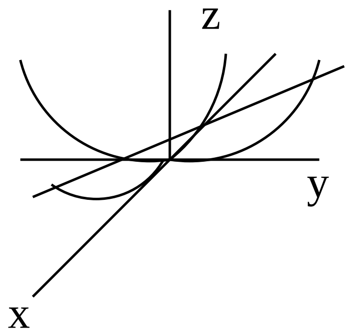
   a) De rechte ℓ wordt loodrecht gespiegeld in V. Bepaal een parametervoorstelling van de gespiegelde van ℓ.

   b) De rechte ℓ wordt in positieve richting om de z-as geroteerd over een hoek van $90°$. Bepaal een parametervoorstelling van de geroteerde rechte.

   c) Men transleert het vlak V over de vector $(-2,1,1)$. Bepaal een vergelijking van het getransleerde vlak.

Z.O.Z.

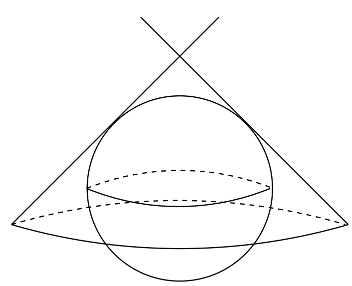
4. In het y, z-vlak ligt de parabool P met parametervoorstelling $\underline{x}(s) = (0, s, s^2)$. In het vlak $y = 0$ ligt de parabool Q met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (t, 0, t^2)$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van het regeloppervlak verbinden de punten $(t, 0, t^2)$ en $(0, t, t^2)$. In de figuur is één zo'n rechte geconstrueerd.



   a) Bepaal een parametervoorstelling van dit regeloppervlak.
   b) Laat zien dat $z = x^2 + 2xy + y^2$ een vergelijking is van het regeloppervlak S.
   c) Het oppervlak S snijdt het vlak $z = 1$ in twee rechten. Bepaal parametervoorstellingen van deze twee rechten.
   d) Bepaal de kromming van S in elk punt.

5. Voor elke waarde van a beschrijft de vergelijking $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ een kegel K_a met top $(0, 0, a)$.

   a) De doorsnede van K_a met het vlak $x = 1$ is een kwadratische kromme. Geef aan of het een ellips, een hyperbool of een parabool betreft aan de hand van hun standaardvergelijkingen.
   b) De doorsnede van de kegel met het vlak $z = 2a$ is een cirkel. Geef een parametervoorstelling van deze cirkel.
   c) Verder is gegeven de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Voor welke *positieve* waarde van a raken de bol en de kegel K_a elkaar? De figuur geeft een impressie van deze situatie.



Zie volgende pagina.

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60) op maandag 23 augustus 2010, 14:00–17:00 uur.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	3b :	3 punten	Vraagstuk	5b:	2 punten
	1b:	2 punten		3c :	3 punten		5c:	3 punten
	1c:	2 punten	Vraagstuk	4a :	2 punten			
Vraagstuk	2a:	3 punten		4b :	2 punten			
	2b:	3 punten		4c :	3 punten			
	2c:	3 punten		4d :	2 punten			
Vraagstuk	3a:	3 punten	Vraagstuk	5a :	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de x–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x,y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

  In het bijzonder is de kromming gelijk aan $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ als $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$