Beknopte uitwerkingen Meetkunde voor Bouwkunde, 2DB60, 23/08/2010
(Hieraan kunnen geen rechten ontleend worden.)

1a
Vul $(1+\lambda, -2\lambda, 3+2\lambda)$ in in de vergelijking van V. Dit leidt tot: $7+9\lambda = -2$ zodat $\lambda = -1$ en $P = (0,2,1)$.
1b
Een normaalvector staat loodrecht op $(1,0,3)$ en $(1,-2,2)$. Dat is dus bijvoorbeeld $(6,1,-2)$ (bijvoorbeeld met behulp van het uitproduct). Een vergelijking is $6x+y-2z=0$.
1c
Snijden met $z=0$ levert $x-2y=-2$ en $z=0$. Met $y=\mu$ vinden we $(x,y,z) = (-2+2\mu, \mu, 0)$. Dus $\underline{x} = (-2,0,0) + \mu(2,1,0)$.

2a
Snijden van $\lambda(1,1,1)$ met V levert $3\lambda = 18$ zodat $\lambda = 6$. Afstand is $6 \cdot |(1,1,1)| = 6\sqrt{3}$.
2b
Los op $\dfrac{|a|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+a^2}} = \dfrac{1}{2}$. Dit levert $a = \pm\sqrt{6}$.
2c
$A = (a,0,0)$, $B = (0,-a,0)$ en $C = (0,0,1)$. $|AC|^2 = 1+a^2$ en $|AB|^2 = 2a^2$. Uit $1+a^2 = 2\cdot 2a^2$ volgt $3a^2 = 1$ zodat $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3a
Snijd $(3,2,2)+\mu(1,3,1)$ met vlak: $3+\mu+(6+9\mu)+(2+\mu = 0$ levert $\mu=-1$. Gespiegelde voor $\mu=-2$: $(1,-4,0)$. Gespiegelde van ℓ is dus: $\underline{x} = \rho(1,-4,0)$.
3b
Vermenigvuldig met $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dus $\lambda(-2,3,2)$.
3c
Ligt (u,v,w) op het getransleerde vlak, dan ligt $(u+2, v-1, w-1)$ op V: $(u+2)+3(v-1)+(w-1)=0$. Uitwerken levert vergelijking $x+3y+z=2$.

4a
$\underline{x} = (t,0,t^2) + \lambda(-t,t,0)$.
4b
$x = t-\lambda t$, $y = \lambda t$, $z = t^2$. Uit eerste twee: $x+y=t$. Samen met $z=t^2$ volgt dan $(x+y)^2 = z$.
4c
$(x+y)^2 = 1$ leidt tot $x+y=1$, $z=1$ resp. $x+y=-1$, $z=1$. Dus $\underline{x} = (1,0,1)+\lambda(1,-1,0)$ en $\underline{x} = (-1,0,1)+\lambda(1,-1,0)$.
4d
De kromming is 0 in elk punt. Met $f(x,y) = x^2+2xy+y^2$ volgt dit uit $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 2$ zodat de teller van de formule voor de kromming gelijk is aan 0.

5a
Hyperbool: $(z-a)^2 - y^2 = 1$. Vergelijk met standaardgedaante $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
5b
$(a\cos t, a\sin t, 2a)$.
5c

Oplossing 1:
Snijdt de kegel met het boloppervlak. Dit leidt tot $4 - z^2 = (z-a)^2$. Deze vergelijking mag slechts 1 oplossing voor z hebben. Dit levert $a = 2\sqrt{2}$.
Oplossing 2:
Snijd met $x = 0$. De kegel snijdt dit vlak in $z - a = y$ en $z - a = -y$. Hiermee liggen richtingen vast. De snijcirkel moet dan op hoogte $h = \sqrt{2}$ liggen. Een punt op die hoogte op de bol: $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. Dit ligt op de kegel als $(\sqrt{2} - a)^2 = 2$ zodat $\sqrt{2} - a = \pm\sqrt{2}$. Dus $a = 2\sqrt{2}$ als we alleen de positieve waarde toelaten.