TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op dinsdag 29 juni 2010, 09:00–12:00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Het gebruik van rekenmachine of laptop is **niet** toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. Gegeven zijn de rechte $\ell : \underline{x} = (1, -1, 3) + \lambda(1, 1, -2)$ en het vlak $V : x + y - 2z = 6$.

   a) Bepaal het snijpunt van de rechte ℓ met het vlak V.

   b) De rechte ℓ wordt getransleerd over de vector $(2, 2, -1)$. Welk punt op de rechte ℓ komt door deze translatie terecht in V?

   c) De door translatie over $(2, 2, -1)$ uit ℓ ontstane rechte noemen we m. Deze rechte is parallel met ℓ. Bepaal een vergelijking van het vlak dat ℓ en m bevat.

2. Voor elke a zijn gegeven de vlakken $U : x + y + az = 1$ en $V : x - y + az = 1$.

   a) Bepaal voor elke waarde van a een parametervoorstelling van de snijlijn van de vlakken U en V.

   b) Bepaal alle waarden van a waarvoor de scherpe hoek tussen U en V gelijk is aan $60°$.

   c) De snijpunten van vlak U met de x-as, y-as en z-as noemen we achtereenvolgens A, B en C. Bepaal alle waarden van a waarvoor de lengte van AC gelijk is aan twee maal de lengte van AB.

3. Gegeven is het vlak U met vergelijking $x + y + z = 1$ en het vlak V met parametervoorstelling $\underline{x} = (3, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(1, 1, -1)$.

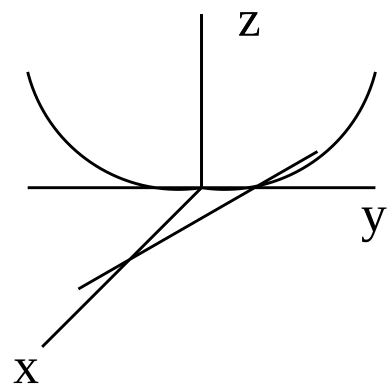
   a) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn van U en V.

   b) Het punt $(3, 0, 1)$ wordt loodrecht gespiegeld in het vlak U. Het resultaat noemen we Q. Bepaal de coördinaten van Q.

   c) Het vlak V wordt loodrecht gespiegeld in het vlak U. Bepaal een parametervoorstelling van dit gespiegelde vlak.

Z.O.Z.

4. In het vlak $x = 0$ ligt de parabool C met parametervoorstelling $\underline{x} = (0, t, t^2)$. Men construeert een regeloppervlak S als volgt: de rechten van het regeloppervlak verbinden het punt $(t, 0, 0)$ op de x-as met het punt $(0, t, t^2)$ op de parabool C. In de figuur is één zo'n rechte geschetst.



   a) Stel een parametervoorstelling voor dit regeloppervlak op.
   b) Leid af dat $z = xy + y^2$ een vergelijking is van het regeloppervlak S.
   c) De doorsnijding van S met het vlak $x = 2$ is een kwadratische kromme. Bepaal het type van deze kromme: ellips, hyperbool of parabool.
   d) Laat door berekening zien dat de kromming van S in elk punt negatief is.

5. De scheve cilinder C heeft vergelijking $x^2 + (y - z + 2)^2 = 2$.

   a) Cilinder C snijdt elk van de vlakken $z = 0$ en $z = 2$ in een cirkel. Bepaal een parametervoorstelling van beide cirkels.
   b) We roteren cilinder C om de z-as over $90°$ in positieve richting. Bepaal een vergelijking van de geroteerde cilinder.
   c) Een boloppervlak past geheel in de cilinder en raakt aan de cilinder. Wat is de maximaal mogelijke straal van zo'n boloppervlak?

Zie volgende pagina.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	3b :	3 punten	Vraagstuk	5b:	3 punten
	1b:	2 punten		3c :	3 punten		5c:	2 punten
	1c:	3 punten	Vraagstuk	4a :	3 punten			
Vraagstuk	2a:	3 punten		4b :	2 punten			
	2b:	3 punten		4c :	2 punten			
	2c:	3 punten		4d :	2 punten			
Vraagstuk	3a:	2 punten	Vraagstuk	5a :	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Formules

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de x–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x, y)$, dan is de kromming in het punt $(a, b, f(a, b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a, b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}\,.$$

  In het bijzonder is de kromming gelijk aan $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ als $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

- Het uitproduct van twee vectoren (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) is gelijk aan

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$