Meetkunde voor Bouwkunde dd 17/6/09: beknopte uitwerkingen
(Aan deze uitwerkingen kunnen geen rechten ontleend worden.)

Opmerking: doorgaans kun je opgaven op meerdere manieren aanpakken. Onderstaande uitwerkingen beperken zich tot één van de oplossingsmogelijkheden. Bedenk ook dat antwoorden soms op verscheidene manieren opgeschreven kunnen worden.

1a: Invullen van $(7+\lambda, 2+2\lambda, 3+\lambda)$ in $x-y+z=2$ levert $8=2$, en dat kan niet. Er is dus geen λ waarvoor het bijbehorende punt op de rechte in het vlak ligt.
1b: Neem rechte door $(7,2,3)$ en loodrecht op $x-y+z=2$, dus $\underline{x}=(7,2,3)+\mu(1,-1,1)$. Snijd deze rechte met V: dit levert $\lambda=-2$ en snijpunt $(5,4,1)$. De afstand is dus gelijk aan $\sqrt{(7-5)^2+(2-4)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{3}$.
1c: Steunvector $(7,2,3)$ en richtingsvectoren $(1,2,1)$ (van ℓ) en $(1,-1,1)$ (loodrecht op V), dus $\underline{x}=(7,2,3)+\lambda(1,2,1)+\mu(1,-1,1)$.

2a: Hoek bepalen met behulp van de normaalvectoren $(0,a,1)$ en $(0,0,1)$: $\sqrt{2}/2=\cos\alpha=1/\sqrt{a^2+1}$. Hieruit $2=a^2+1$ zodat $a=1$ of $a=-1$. Twee oppervlakken: $y+z=5$ en $-y+z=5$.
2b: We roteren de normaalvector $(0,2,1)$ over $90°$. We vermenigvuldigen dus $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. De vergelijking wordt dus $-2x+z=d$. Omdat $(0,0,5)$ op de z-as ligt en op V_2, ligt het punt ook op W. Dit levert $d=5$, dus $W:-2x+z=5$.
2c: Ja, de afstand tot de oorsprong blijft hetzelfde en wel $\sqrt{5}$. Deze afstand bepaal je door $\mu(0,2,1)$ te snijden met V_2. Dit levert $\mu=1$ zodat de afstand gelijk is aan $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. De vergelijking is $x^2+y^2+z^2=5$.

3a: De twee vlakken zijn niet parallel, dus snijden elkaar in een rechte. Elk punt $(1-2\lambda, -2+\lambda, -1+2\lambda)$ van ℓ voldoet aan de vergelijking van U: $1-2\lambda-2(-2+\lambda)+2(-1+2\lambda)=3$, en aan de vergelijking van V: $1-2\lambda+-1+2\lambda=0$. Dus ℓ is de snijrechte.
3b: Het getransleerde vlak is parallel met U, dus heeft een vergelijking van de vorm $x-2y+2z=d$. Het punt $(3,0,0)$ ligt op U, dus $(3,0,0)+(1,1,1)$ ligt op U'. Invullen levert $d=4$.
3c: Uit de vergelijkingen volgt $z=-x$ en vervolgens $2y=-4-x$. Als nu $x=\mu$, dan is $y=-2-\mu/2$ en $z=-\mu$. Samen: $\underline{x}=(0,-2,0)+\mu(1,-1/2,-1)$.
3d: We spiegelen de normaalvector $(1,-2,2)$ van U: snijd $(1,-2,2)+\lambda(1,0,1)$ met V. Dat levert $\lambda=-3/2$. Het spiegelbeeld vinden we voor $\lambda=-3$. We vinden $(-2,-2,-1)$. Vergelijking is dan $2x+2y+z=d$. De steunvector $(1,-2,-1)$ van de snijrechte ligt in V, dus gaat bij spiegeling in V over in zichzelf. Invullen van $(1,-2,-1)$ levert $d=-3$. Vergelijking: $2x+2y+z=-3$.

4a: Voor $\lambda=0$ vinden we $(0,\cos t,\sin t)$, een punt op C. Voor $\lambda=1$ vinden we $(1,\cos t,-1+\sin t)$, een punt op D.
4b: Uit $x=\lambda$, $y=\cos t$, $z=-\lambda+\sin t$ halen we $(x+z)^2+y^2=\sin^2 t+\cos^2 t=1$. Vergelijking: $(x+z)^2+y^2=1$.
4c: Uit a) halen we dat voor $t=0$ ($0f=2\pi$) de y-coördinaat gelijk is aan 1. We vinden dan $(0,1,0)+\lambda(1,0,-1)$.

5a: Vergelijking herschrijven als $x^2+y^2-(z-10)^2=0$. Gradiënt: $(2x,2y,-2(z-10))$. Voor $(0,2,8)$ levert dat normaalvector $(0,4,4)$. Vergelijking wordt $y+z=10$.
5b: Voor $x=0$ vinden we $(z-10)^2=y^2$ zodat $z-10=y$ of $z-10=-y$. De ene rechte is de snijlijn van $x=0$ en $z=y+10$; de andere rechte is de snijlijn van $x=0$ en $z=-y+10$.

5c: Het middelpunt $(0, 0, a)$ ligt op de z-as. De vector $(0, 2, 8) - (0, 0, a)$ staat loodrecht op het raakvlak aan het boloppervlak in $(0, 2, 8)$. Deze vector is parallel met het raakvlak aan de kegel in $(0, 2, 8)$ en staat dus loodrecht op de normaalvector $(0, 4, 4)$. Dus $a = 10$ en de vergelijking wordt $x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 8$ (de 8 halen we uit het feit dat $(0, 2, 8)$ op de bol ligt.)