TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op dinsdag 3 mei 2005, 09:00–12:00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Voor berekeningen in het tentamen is geen (grafische) rekenmachine nodig, maar gebruik van een niet–programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Enkele formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

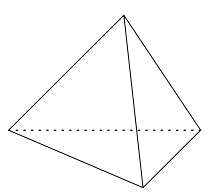
1. De rechte ℓ is gegeven door middel van de parametervoorstelling $\ell : (-2, 1, 3)+\lambda(1, 2, -1)$.

   a) Bepaal het snijpunt van de rechte ℓ met het y, z–vlak, dat wil zeggen het vlak met vergelijking $x = 0$.
   b) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak dat ℓ bevat en door het punt $(4, 0, 3)$ gaat.
   c) We projecteren de rechte ℓ vanuit het punt $(4, 0, 3)$ op het vlak $x = 0$. Het resultaat is een rechte. Bepaal een parametervoorstelling van deze rechte.

2. V is het vlak met vergelijking $ax + z = 8$, gegeven in x, y, z–coördinaten.

   a) Bepaal voor $a \geq 0$ de cosinus van de hoek tussen V en het vlak $x = 0$ als functie van a.
   b) Bij spiegeling van V in het vlak $x = 0$ gaat V over in een vlak W. Bepaal een vergelijking van W.
   c) We bekijken alleen het deel van het vlak V waarbij $0 \leq x \leq 1$ en $0 \leq y \leq 1$. Dit deel van V is een parallellogram. Bepaal de hoekpunten hiervan en bereken de oppervlakte als functie van a.

3. Een regelmatig viervlak bestaat uit vier gelijkzijdige driehoeken die langs hun kanten aan elkaar vastzitten (zie figuur).



   Om een dergelijke vorm op te bouwen gaan we als volgt te werk. In het x, y–vlak starten we met de gelijkzijdige driehoek met hoekpunten $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$ en $C = (1, \sqrt{3}, 0)$. We gaan op zoek naar een vierde hoekpunt D van het regelmatig viervlak.

   a) Laat zien dat elk punt van de rechte $\ell : (1, \sqrt{3}/3, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ gelijke afstand heeft tot elk van de drie hoekpunten A, B en C.
   b) Bepaal het punt D op ℓ met positieve z–coördinaat waarvoor je een regelmatig viervlak krijgt.

Z.O.Z.

---

4. Een buizenconstructie bestaat uit een aantal cilinders die zijn aangesloten op diverse boloppervlakken. Een van die boloppervlakken is het oppervlak S met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Een van de cilinders, C, heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 8$.

   a) De cilinder snijdt S in twee cirkels. Geef parametervoorstellingen van deze twee cirkels.

   b) Men roteert de cilinder C om de x–as over 45° in positieve richting. Bepaal, bijvoorbeeld met behulp van een geschikte rotatiematrix, een vergelijking van de resulterende cilinder C'. Bepaal ook parametervoorstellingen van de snijcirkels van C' met S.

5. Men construeert een regeloppervlak op de volgende manier. Gegeven zijn de rechte met parametervoorstelling $\ell : (1, t, 0)$ en de parabool $C : (0, s, s^2)$. Bij elk punt $(1, t, 0)$ van de rechte ℓ bepaalt men een punt op de parabool C zodanig dat de rechte m_t door deze twee punten parallel is met het x, z–vlak. Deze rechten vormen samen het regeloppervlak.

   a) Welk punt van de parabool ligt op de rechte m_t? Geef een parametervoorstelling van de rechte m_t.

   b) Laat zien dat het regeloppervlak vergelijking $z = (1 - x)y^2$ heeft.

   c) Bepaal een vergelijking van het raakvlak in de oorsprong aan het regeloppervlak.

   d) Bepaal de kromming van het regeloppervlak in het punt $(0, 0, 0)$.

6. Voor elke $a \neq 0$ is het oppervlak $2x^2 + (y - az)^2 = 1$ een scheve cilinder.

   a) De doorsnede van de cilinder met het vlak $y = 2$ is een ellips. Wat zijn de coördinaten van het middelpunt van deze ellips? Voor welke waarde(n) van a is de doorsnede een cirkel?

   b) Voor welke waarden van c snijdt het vlak $x = c$ de cilinder? Bepaal in die gevallen wat voor figuur de doorsnede is (bijvoorbeeld door middel van vergelijkingen of parametervoorstellingen).

Z.O.Z.

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60) op dinsdag 3 mei 2005, 09:00–12:00 uur.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	3b :	3 punten	Vraagstuk	6a:	3 punten
	1b:	3 punten	Vraagstuk	4a :	2 punten		6b:	2 punten
	1c:	3 punten		4b :	4 punten			
Vraagstuk	2a:	2 punten	Vraagstuk	5a :	2 punten			
	2b:	2 punten		5b :	2 punten			
	2c:	3 punten		5c :	2 punten			
Vraagstuk	3a:	3 punten		5d :	2 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en af te ronden.

Formulehulp

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de z– of x_3–as over een hoek α:

  $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Voor rotaties om de andere coördinaatassen dient de matrix aangepast te worden.

- Taylor–ontwikkeling (tot en met tweede orde termen) van een differentieerbare functie $f(x,y)$ rond $(0,0)$:

  $$f(0,0) + x\, f_x(0,0) + y\, f_y(0,0) + \frac{1}{2}\left(x^2 f_{xx}(0,0) + 2xy f_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)\right).$$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x,y)$, dan is de kromming in het punt $(a,b,f(a,b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a,b))

  $$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

  In het bijzonder is de kromming gelijk aan $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ als $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.