TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Meetkunde voor Bouwkunde (2DB60), op maandag 14 maart 2005, 14:00–17:00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer *al* uw antwoorden! Voor berekeningen in het tentamen is geen (grafische) rekenmachine nodig, maar gebruik van een niet–programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Eventueel benodigde formules vindt u achteraan, evenals de puntentelling.

---

1. De rechte ℓ is gegeven door middel van de parametervoorstelling $\ell : (-2, 0, 2)+\lambda(3, 4, -1)$. Verder is het punt $P = (-5, -4, 3)$ gegeven.

   a) Laat zien dat P op de rechte ℓ ligt.

   b) Bepaal het snijpunt van de rechte ℓ met het vlak met vergelijking $x_1 = 1$.

   c) We voeren een scheve projectie uit van ℓ op het vlak $x_1 = 1$. De richting van de scheve projectie is bepaald door de vector $(1, 1, 2)$. Het resultaat is een rechte. Bepaal een parametervoorstelling van het vlak dat ℓ bevat en ook $(1, 1, 2)$ als richtingsvector heeft. Bereken met behulp van dit vlak een parametervoorstelling van de scheve projectie van ℓ op het vlak $x_1 = 1$.

2. V is het vlak met vergelijking $-2y + z = 8$, gegeven in x, y, z–coördinaten.

   a) Voor welke waarde(n) van a staat het vlak met vergelijking $ay + z = 8$ loodrecht op V? Voor welke waarde(n) van a is het vlak evenwijdig met het x, y–vlak?

   b) We bekijken alleen het deel van het vlak met vergelijking $ay + z = 8$ waarbij $0 \le x \le 1$ en $0 \le y \le 1$. Dit deel is een parallellogram. Bereken de oppervlakte hiervan als functie van a.

3. Voor het ontwerp van een piramidevormig gebouw gaat men uit van een schuine buitenwand die ligt in het vlak V_1 met vergelijking $2x_1 + x_3 = 6$.

   a) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn van V_1 met het x_1, x_2–vlak. Bereken ook het snijpunt van V_1 met de x_3–as.

   b) De tweede buitenwand V_2 ontstaat door V_1 in positieve richting over een hoek van $90°$ te roteren om de x_3–as. Laat met behulp van een geschikte rotatiematrix zien dat het vlak V_1 overgaat in het vlak V_2 met vergelijking $2x_2 + x_3 = 6$. Wat is de cosinus van de hoek tussen V_1 en V_2?

Z.O.Z.

---

4. Gegeven is de rechte ℓ met parametervoorstelling $\ell : \lambda(0, 1, 1)$.

   a) Bepaal een vergelijking van het vlak dat loodrecht staat op ℓ en het punt $(0, t, 2)$ bevat. Bepaal de vergelijking van het boloppervlak met middelpunt $(0, 0, 0)$ dat eveneens $(0, t, 2)$ bevat.

   b) We wentelen de rechte $m : x = 0,\ z = 2$ om ℓ. Elk punt $(0, t, 2)$ van m levert dan een cirkel op. Bepaal, bijvoorbeeld door t te elimineren uit de vergelijkingen die u in a) heeft gevonden, een vergelijking van het omwentelingslichaam. Deze vergelijking beschrijft een kegel. Waar ligt de top van deze kegel?

5. Gegeven is de hyperboloïde Q met vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

   a) Voor elke constante c is de doorsnijding van Q met het vlak $z = c$ een cirkel met vergelijking $x^2+y^2 = 4+c^2$. Geef met behulp van de cosinus– en de sinusfunctie een parametervoorstelling van deze cirkel. Breid deze uit tot een parametervoorstelling van Q van de vorm $\mathbf{x}(t, u) = (x(t, u), y(t, u), t)$.

   b) Door elk punt van Q gaan twee rechten die geheel op Q liggen. Gebruik bijvoorbeeld $x^2 - 4 = z^2 - y^2$ om twee van dergelijke rechten te vinden die door het punt $(2, 0, 0)$ gaan. Geef parametervoorstellingen van de twee rechten.

   c) Bepaal een vergelijking of parametervoorstelling van het raakvlak aan Q in het punt $(2, 0, 0)$.

   d) Het deel van de hyperboloïde waarvoor $x > 0$ kan beschreven worden als grafiek van een functie van y en z. Bepaal zo'n functie. Bereken met behulp van deze functie de kromming van Q te $(2, 0, 0)$.

6. Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en $z = 0$ in het x, y–vlak.

   a) Door elk punt van deze cirkel trekken we een rechte lijn bepaald door de richting $(0, 2, 1)$. Bepaal een vergelijking van de resulterende scheve cilinder; gebruik zo nodig een parametervoorstelling van de cirkel.

   b) We bekijken het deel van de cilinder waarvoor $0 \leq z \leq 8$. De onderkant (de doorsnede van $z = 0$ met de cilinder) is een cirkel. De 'bovenkant' voldoet aan de vergelijking $z = 8$ en een vergelijking in x en y. Bepaal deze laatste vergelijking en bepaal het middelpunt van deze kromme. Is het een ellips of een cirkel?

   c) De doorsnede van de cilinder met het vlak $y = 2$ voldoet aan twee vergelijkingen: $y = 2$ en een vergelijking in x en z. Wat voor kwadratische kromme is dit, een cirkel, een ellips, een parabool of een hyperbool? Motiveer je antwoord aan de hand van een tot standaardgedaante herleide vergelijking.

Z.O.Z.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1a:	2 punten	Vraagstuk	4a :	4 punten	Vraagstuk	6b:	3 punten
	1b:	2 punten		4b :	4 punten		6c:	3 punten
	1c:	4 punten	Vraagstuk	5a :	3 punten			
Vraagstuk	2a:	3 punten		5b :	3 punten			
	2b:	3 punten		5c :	3 punten			
Vraagstuk	3a:	3 punten		5d :	3 punten			
	3b:	4 punten	Vraagstuk	6a :	3 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 5 te delen en af te ronden.

Formulehulp

- Rotatiematrix voor de rotatie in positieve richting om de x_3–as over een hoek α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Taylor–ontwikkelingen (tot en met tweede orde termen):
  - Van een differentieerbare functie $f(x,y)$ rond $(0,0)$:

$$f(0,0) + x\, f_x(0,0) + y\, f_y(0,0) + \frac{1}{2}\left(x^2 f_{xx}(0,0) + 2xy f_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)\right)$$

  - Van $\sqrt{1+x}$ rond $x=0$: $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$

- Als een oppervlak gegeven is als grafiek van een functie $z = f(x,y)$, dan is de kromming in het punt $(a,b,f(a,b))$ gelijk aan (alle afgeleiden uitgerekend te (a,b))

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}\,.$$

  In het bijzonder is de kromming gelijk aan $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ als $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.