Beknopte antwoorden Meetkunde voor B (14 maart 2005)

**1a**. Zoek $\lambda$ zó dat $(-2,0,2)+\lambda(3,4,-1)=(-5,-4,3)$. Dit leidt tot $\lambda=-1$. Voor $\lambda=-1$ vind je $(-2,0,2)-1\cdot(3,4,-1)=(-5,-4,3)$.
**1b**. Los op $-2+3\lambda=1$, zodat $\lambda=1$. Snijpunt is $(1,4,1)$.
**1c**. Gevraagde vlak is $(-2,0,2)+\lambda(3,4,-1)+\mu(1,1,2)$. Snijden met $x_1=1$: los op $-2+3\lambda+\mu=1$ zodat $\mu=3-3\lambda$. Rechte wordt $(-2,0,2)+\lambda(3,4,-1)+(3-3\lambda)(1,1,2)$ en dat vereenvoudigt tot $(1,3,8)+\lambda(0,1,-7)$.

**2a**. Vector loodrecht op $V$ is $(0,-2,1)$; vector loodrecht op $ay+z=8$ is $(0,a,1)$. Inproduct van beide vectoren moet 0 zijn, dus $-2a+1=0$ zodat $a=1/2$. Gevraagde vlak is $(-a/2)\,y+z=8$. Vlak evenwijdig met $x,y$–vlak treedt op voor $a=0$, dwz $z=8$.
**2b**. Hoekpunten zijn $(0,0,8)$, $(1,0,8)$, $(0,1,8-a)$ en $(1,1,8-a)$ boven achtereenvolgens $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(1,1,0)$. Vectoren die parallellogram opspannen zijn bijvoorbeeld $(1,0,0)$ (van $(1,0,8)-(0,0,8)$) en $(0,1,-a)$ (van $(0,1,8-a)-(0,0,8)$). Gevraagde oppervlakte is lengte van het uitproduct van deze twee vectoren, dus $|(0,a,1)|=\sqrt{1+a^2}$. (Overigens kun je ook opmerken dat het een rechthoek betreft en dus lengte maal breedte gebruiken.)

**3a**. Uit $2x_1+x_3=6$ en $x_3=0$ vinden we $(3,\lambda,0)$ als oplossingen, dus de rechte $(3,0,0)+\lambda(0,1,0)$.
Voor het snijpunt met de $x_3$–as: dan geldt $x_1=x_2=0$ zodat $x_3=6$. Snijpunt is dus $(0,0,6)$.
**3b**. Als $(u,v,w)$ op het geroteerde vlak ligt, draai dan 90° terug, dwz $-90°$. Je kunt hiervoor bijvoorbeeld de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gebruiken. Het resultaat is $(v,-u,w)$. Deze voldoet aan de vergelijking van $V_1$, dus '2 maal eerste coördinaat plus derde coördinaat is 6', zodat $2v+w=6$. Vergelijking is dus $2x_2+x_3=6$.
Cosinus van de hoek $\alpha$ te bepalen uit

$$\frac{|(2,0,1)\bullet(0,2,1)|}{|(2,0,1)|\cdot|(0,2,1)|}=\frac{1}{5}\,.$$

**4a**. $y+z=t+2$ (normaalvector is $(0,1,1)$ dus wordt de vergelijking van de vorm $0\cdot x+1\cdot y+1\cdot z=$constante; de constante bepaal je door $(0,t,2)$ in te vullen) en $x^2+y^2+z^2=t^2+4$ voor het boloppervlak.
**4b**. Uit eerste vergelijking volgt $t=y+z-2$, dus (invullen in tweede vergelijking): $x^2+y^2+z^2=(y+z-2)^2+4$. Vereenvoudigen: $x^2-2yz+4y+4z=8$.
Top: snijpunt $m$ met $\ell$ bijvoorbeeld, dus $(0,2,2)$.

**5a**. Cirkel $x=\sqrt{4+c^2}\cos u$ en $y=\sqrt{4+c^2}\sin u$ (verder $z=c$). en voor het oppervlak $(\sqrt{4+t^2}\cos u,\sqrt{4+t^2}\sin u,t)$.
**5b**. Rechte 1:
Uit $(x+2)(x-2)=(z+y)(z-y)$ haal je bijvoorbeeld voor elke $\lambda$ de snijrechte van $\lambda(x+2)=z+y$ en $x-2=\lambda(z-y)$. Voor $\lambda=0$ krijg je een snijrechte waar $(2,0,0)$ op ligt, $y+z=0$ en $x=2$. Parametervoorstelling: $(2,0,0)+\mu(0,1,-1)$. (De snijrechten van de vorm $x+2=\lambda(z+y)$ en $\lambda(x-2)=z-y$ leiden niet tot een rechte door $(2,0,0)$.)
Rechte 2:
$\lambda(x+2)=z-y$ en $x-2=\lambda(z+y)$. Vul weer $(2,0,0)$ in en je vindt $\lambda=0$ en de rechte $z-y=0$ en $x=2$. Parametervoorstelling: $(2,0,0)+\mu(0,1,1)$. (De snijrechten van de vorm $x+2=\lambda(z-y)$ en $\lambda(x-2)=z+y$ leiden niet tot een rechte door $(2,0,0)$.)
**5c**. Normaalvector te $(x,y,z)$ is $(2x,2y,-2z)$, dus te $(2,0,0)$ is dat $(4,0,0)$. Dit leidt tot het

vlak $x = 2$.
**5d**. $x = \sqrt{4 - y^2 + z^2}$. Schrijf dit als

$$2\sqrt{1 + \frac{z^2 - y^2}{4}}$$

Taylor–ontwikkeling rond $y = z = 0$: $2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 - y^2}{2}$ (via reeks voor $\sqrt{1+x}$ of via partiële afgeleiden). Kromming is derhalve $(1/2) \cdot (-1/2) = -1/4$ (de situatie uit de formulehulp is hier van toepassing).

**6a**. Parametervoorstelling oppervlak: $x = \cos t$, $y = \sin t + 2\lambda$, $z = 0 + \lambda$ (vanuit elk punt $(\cos t, \sin t, 0)$ een rechte aanbrengen met richtingsvector $0, 2, 1)$). Hieruit $x = \cos t$, $y = \sin t + 2z$ zodat $x^2 + (y - 2z)^2 = 1$.
**6b**. Voor $z = 8$ vinden we $x^2 + (y - 16)^2 = 1$, $z = 8$. Dus een cirkel met middelpunt $(0, 16, 8)$ en straal 1. (Je kunt ook zeggen: deze cirkel is de getransleerde van de 'grondcirkel' over $(0, 16, 8)$.)
**6c**. De vergelijking in $x$ en $z$ is $x^2 + 4(z - 1)^2 = 1$ (en $y = 2$), een ellips met middelpunt $(0, 2, 1)$.